

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Niko Tatomir

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**IZRAČUN SILE OTPORA I UZGONA
AEROPROFILA**

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing.

Student:

Niko Tatomir

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc Šavaru na strpljenju i potpori tijekom izrade ovog završnog rada.

Posebno se želim zahvaliti Dubravku Matijaševiću i Severinu Krizmaniću na velikoj pomoći i stručnim savjetima koji su uvelike pridonijeli pri izradi ovoga rada.

Niko Tatomir



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Niko Tatomir**

Mat. br.: 0035182667

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Izračun sile otpora i uzgona aero - profila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Aerofoil lift and drag calculation**

Opis zadatka:

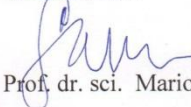
Snažnim razvojem računala i razvojem CFD softwera moguće je napraviti numeričku simulaciju strujanja oko aero – profila. Točan i pouzdan izračun svih parametara strujanja od presudne je važnosti za avio industriju, pri konstrukciji vjetro turbina, turbostrojeva itd. Točnost proračuna direktno je vezana uz pravilan izbor modela turbulencije. U ovom radu kandidat će ispitati primjenu $k-\omega$ modela turbulencije te ispitati kvalitetu odabira ovog modela turbulencije. U okviru ovog zadatka potrebno je:

1. Definirati domenu strujanja za izračun sile otpora i uzgona aero – profila u nekom od CAD alata (npr. SolidWorks).
2. Napraviti mrežu na kojoj će se provesti simulacija
3. Definirati i opisati matematičko fizikalni $k-\omega$ model turbulencije
4. Provesti simulaciju pomoću jednog ili više standardnih CFD alata (Fluent, Fire itd.)
5. Usporediti rezultate s eksperimentalnim vrijednostima.

Rezultate proračuna prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.
U radu treba navesti literaturu i eventualno dobivenu pomoć tijekom izrade.


Zadatak zadan:
25. studenog 2014.

Zadatak zadao:


Prof. dr. sci. Mario Šavar

Rok predaje rada:
1. rok: 26. veljače 2015.
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 2., 3., i 4. ožujka 2015.
2. rok: 21., 22., i 23. rujna 2015.
Predsjednik Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Aeroprofil.....	2
1.1.1. Karakteristične veličine aerodinamičkog profila	3
1.1.2. Aerodinamičke sile vezane za aeroprofil	4
1.2. NLF (1)-0115 aeroprofil	6
2. OPĆENITO O MEHANICI FLUIDA	7
2.1. Teorijski pristup	7
2.2. Eksperimentalni pristup	8
2.3. Računalna dinamika fluida (RDF)	8
2.3.1. Primjeri primjene računalne dinamike fluida	9
3. OSNOVE JEDNADŽBE DINAMIKE FLUIDA	10
3.1. Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta).....	11
3.2. Zakon očuvanja količine gibanja	11
3.3. Konstitutivne Jednadžbe	13
3.3.1. Newtonov zakon viskoznosti	13
4. TURBULENCIJA.....	14
4.1. Reynolds – Averaged Navier Stokes (RANS) pristup za rješavanje turbulentnog strujanja.....	16
4.1.1. RANS jednadžbe za nestlačivo strujanje	17
4.1.2. Modeli turbulencije	19
4.1.2.1. k-kl- ω model turbulencije	20
4.1.2.2. Rubni uvjeti k-kl- ω model turbulencije	23
5. METODA KONAČNIH VOLUMENA (MKV).....	24
5.1. Diskretizacija integralne transportne jednadžbe	25
5.2. Numeričke sheme za prostornu diskretizaciju	29
5.2.1. Shema centralnih razlika (Central Differencing Scheme – CDS).....	29
5.2.2. Uzvodna shema (Upwind Differencing Scheme – UDS)	30
5.2.3. Linearno uzvodna shema (Second Order Upwind ili Linear Upwind Scheme – LUDS).....	31
5.3. Numeričke sheme za vremensku diskretizaciju	32
5.3.1. Implicitna shema prvog reda točnosti (Euler).....	32
5.4. Osnovna svojstva numeričkih shema	33
5.4.1. Konzervativnost	33
5.4.2. Konvergencija	33

5.4.3. Transportivnost	34
5.5. Rekapitulacija metode konačnih volumena	35
5.5.1. Opći postupak numeričkog proračuna pomoću osnovne metode konačnih volumena.....	36
6. METODE RJEŠAVANJA NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI	37
6.1. Jednadžba za tlak	38
6.2. Nepomaknuta mreža	39
6.2.1. Problemi nepomaknute mreže.....	40
6.2.2. Rhie i Chow interpolacija	41
6.3. Povezivanje polje brzine i tlaka	41
6.4. SIMPLE Algoritam	43
6.5. PISO Algoritam.....	45
7. NUMERIČKI PRORAČUN.....	46
7.1. Simulacija strujanja oko cilindra ($Re = 1 \cdot 10^5$).....	46
7.1.1. Diskretizacija područja proračuna	46
7.1.2. Rubni uvjeti.....	49
7.1.2.1. Rubni uvjet za k- κ - ω model turbulencije.....	49
7.1.2.2. Rubni uvjet za k - ω SST model turbulencije	51
7.1.3. Rezultati numeričke simulacije i usporedba sa eksperimentalnim mjerenjima ..	51
7.2. Simulacija strujanja oko aeroprofila NLF(1) – 0115 ($Re = 2 \cdot 10^5$)	55
7.2.1. Diskretizacija područja proračuna	55
7.2.2. Rubni uvjeti.....	57
7.2.3. Rezultati numeričke simulacije.....	59
8. ZAKLJUČAK.....	65
LITERATURA.....	66
PRILOZI.....	68

POPIS SLIKA

Slika 1.1	Karakteristični oblici aerodinamičkih profil različitih namjena.....	2
Slika 1.2	Geometrijske veličine aeroprofila	3
Slika 1.3	Prikaz sila na aerodinamičko tijelo	4
Slika 1.4	Koordinate NLF(1) – 0115 aeroprofila	6
Slika 1.5	2D prikaz NLF(1) – 0115 aeroprofila	6
Slika 2.1	Grane mehanike fluida	7
Slika 4.1	Reynoldsov eksperiment	14
Slika 4.2	Usporedba dva pristupa: DNS i RANS	16
Slika 5.1	Dio idealno diskretiziranog područja proračuna	25
Slika 5.2	Konačni volumeni koji dijele zajedničku stranicu	30
Slika 5.3	Uz definiciju LUDS sheme	31
Slika 6.1	Nepomaknuta mreža.....	39
Slika 6.2	"cik-cak" raspodjela tlaka	40
Slika 7.1	Diskretizacija područja proračuna oko cilindra.....	46
Slika 7.2	Diskretizacija područja proračuna oko cilindra – detalj A.....	47
Slika 7.3	Diskretizacija područja proračuna oko cilindra – detalj B	48
Slika 7.4	Koeficijent otpora C_D dobiven pomoću k - kl - ω modela turbulencije	51
Slika 7.5	Koeficijent otpora C_D dobiven pomoću k - ω SST modela turbulencije.....	52
Slika 7.6	Polje tlaka p pri $C_{D, \max} = 1,377157$ i $t = 332,9$ s (k - kl - ω)	53
Slika 7.7	Polje brzine U pri $C_{D, \max} = 1,377157$ i $t = 332,9$ s (k - kl - ω)	53
Slika 7.8	Polje tlaka p pri $C_{D, \min} = 0,835223$ i $t = 327$ s (k - kl - ω).....	53
Slika 7.9	Polje brzine U pri $C_{D, \min} = 0,835223$ i $t = 327$ s (k - kl - ω).....	53
Slika 7.10	Polje tlaka p pri $C_{D, \max} = 1,159074$ i $t = 271,3$ s (k - ω SST).....	54
Slika 7.11	Polje brzine U pri $C_{D, \max} = 1,159074$ i $t = 271,3$ s (k - ω SST).....	54
Slika 7.12	Polje tlaka p pri $C_{D, \min} = 0,941626$ i $t = 288,4$ s (k - ω SST)	54
Slika 7.13	Polje brzine U pri $C_{D, \min} = 0,941626$ i $t = 288,4$ s (k - ω SST).....	54
Slika 7.14	Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145).....	55
Slika 7.15	Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145) – detalj C	56
Slika 7.16	Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145) – detalj D	56
Slika 7.17	C_D pri $\alpha=0^\circ$ (prvi red točnosti).....	59
Slika 7.18	C_L pri $\alpha=0^\circ$ (prvi red točnosti)	59
Slika 7.19	C_D pri $\alpha=5^\circ$ (prvi red točnosti).....	59
Slika 7.20	C_L pri $\alpha=5^\circ$ (prvi red točnosti)	59
Slika 7.21	C_D pri $\alpha=10^\circ$ (prvi red točnosti).....	59
Slika 7.22	C_L pri $\alpha=10^\circ$ (prvi red točnosti)	59
Slika 7.23	C_D pri $\alpha=0^\circ$ (viši red točnosti)	60
Slika 7.24	C_L pri $\alpha=0^\circ$ (viši red točnosti).....	60
Slika 7.25	C_D pri $\alpha=5^\circ$ (viši red točnosti)	60
Slika 7.26	C_L pri $\alpha=5^\circ$ (viši red točnosti).....	60
Slika 7.27	C_D pri $\alpha=10^\circ$ (viši red točnosti)	60
Slika 7.28	C_L pri $\alpha=10^\circ$ (viši red točnosti).....	60
Slika 7.29	Koeficijent otpora C_D u ovisnosti od napadnog kuta α	61
Slika 7.30	Koeficijent uzgona C_L u ovisnosti od napadnog kuta α	62
Slika 7.31	Polje tlaka pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)	62
Slika 7.32	Polje brzine pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)	62

Slika 7.33	Polje tlaka pri $\alpha=5^\circ$ (t = 30 s, prvi red točnosti)	63
Slika 7.34	Polje brzine pri $\alpha=5^\circ$ (t = 30 s, prvi red točnosti)	63
Slika 7.35	Polje tlaka pri $\alpha=10^\circ$ (t = 30 s, prvi red točnosti)	63
Slika 7.36	Polje brzine pri $\alpha=10^\circ$ (t = 30 s, prvi red točnosti)	63
Slika 7.37	Polje tlaka pri $\alpha=0^\circ$ (t = 16 s, drugi red točnosti)	63
Slika 7.38	Polje brzine pri $\alpha=0^\circ$ (t = 16 s, drugi red točnosti)	63
Slika 7.39	Polje tlaka pri $\alpha=5^\circ$ (t = 11,5 s, drugi red točnosti)	64
Slika 7.40	Polje brzine pri $\alpha=5^\circ$ (t = 11,5 s, drugi red točnosti)	64
Slika 7.41	Polje tlaka pri $\alpha=10^\circ$ (t = 27 s, drugi red točnosti)	64
Slika 7.42	Polje brzine pri $\alpha=10^\circ$ (t = 27 s, drugi red točnosti)	64

POPIS TABLICA

Tablica 4.1 Broj dodatnih transportnih jednadžbi ovisno o modelu turbulencije	20
Tablica 7.1 Rubni uvjeti za k , kl , i ω (cilindar)	49
Tablica 7.2 Rubni uvjeti za v_t , U i p (cilindar)	50
Tablica 7.3 Usporedba osrednjenog koeficijent otpora $\overline{C_D}$	52
Tablica 7.4 Rubni uvjeti za k , k_L , i ω (za aeroprofil NLF(1) – 0115)	57
Tablica 7.5 Rubni uvjeti za v_t , U i p (za aeroprofil NLF(1) – 0115)	58
Tablica 7.6 Vremenski osrednjeni koeficijenti optora $\overline{C_D}$ i uzgona $\overline{C_L}$ s obzirom na napadni kut α i red točnosti	61

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
F_i	N	Sila
D	N	Sila otpora
L	N	Sila uzgona
p	Pa	Tlak
p'	Pa	Pulsirajući tlak
\overline{p}	Pa	Osrednjeni tlak
q_∞	Pa	Dinamički tlak
Σ_{ji}	Pa	Simetrični tenzor viskoznih naprezanja
σ_{ji}	Pa	Simetrični tenzor naprezanja
σ_i	Pa	Vektor naprezanja
A_{ref}	m ²	Referenta površina
S	m ²	Površina
S_f	m ²	Površina stranice kontrolnog volumena
S_M	m ²	Površina materijalnog volumena
V_M	m ³	Materijalni volumen
v_i, v_j	m/s	Vektor brzine
$\overline{v_i}$	m/s	Osrednjeni vektor brzine
v_i'	m/s	Pulsirajući vektor brzine
U_∞	m/s	Brzine neporemećenog dijela strujanja
μ	Pa · s	Dinamička viskoznost
μ_V	Pa · s	Volumenska viskoznost
μ_t	Pa · s	Turbulentna viskoznost
k	J/kg	Specifična turbulentna kinetička energija
k_L	J/kg	Specifična laminarna kinetička energija
D_{ji}	1/s	Tenzor brzine deformacije
ω	1/s	Vremenska skala turbulencije
ρ	kg/m ³	Gustoća fluida
f_i	N/kg	Masena gustoća gravitacijske sile
λ_T	m	Duljinska skala turbulencije
C_D	-	Koeficijent otpora
C_L	-	Koeficijent uzgona
$\overline{C_D}$	-	Vremenski osrednjeni koeficijent otpora
$\overline{C_L}$	-	Vremenski osrednjeni koeficijent uzgona

n_i, n_j	-	Jedinični vektor normale
N_{crit}	-	Kritična vrijednost amplifikacijskog faktora N
Pe	-	Pecletov broj
Re	-	Reynoldsov broj
$Re_{krit, donja}$	-	Donji kritični Reynoldsov broj
$Re_{krit, gonja}$	-	Gornji kritični Reynoldsov broj
Tu_{∞}	-	Intenzitet turbulencije
y^+	-	Bezdimenzijska udaljenost od nepropusne površine
δ_{ji}	-	Jedinični tenzor
φ		Fizikalna veličina
Γ_{φ}		Koeficijent difuzije fizikalne veličine
S_{φ}		Izvorski član fizikalne veličine

SAŽETAK

U okviru ovog završnog rada je izvršena numerička simulacija turbulentnog strujanja ($Re = 2 \cdot 10^5$) oko NLF(1) – 0115 aeroprofila pomoću $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije pri napadnim kutovima 0° , 5° i 10° . Pri tim napadnim kutovima su izračunati koeficijenti otpora i uzgona koji su uspoređeni sa rezultatima dobivenim XFOIL kodom. Valjanost $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije je ispitana na sljedeći način:

1. Koeficijent otpora cilindra pri $Re = 1 \cdot 10^5$ se izračunao numeričkom simulacijom pomoću $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije.
2. Koeficijent otpora dobiven $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modelom se usporedio sa koeficijentima otpora dobivenim eksperimentalnim mjerenjima i $k\text{-}\omega$ SST modelom turbulencije.

Ključne riječi: aerodinamika, aeroprofil, turbulencija, URANS, $k\text{-}kl\text{-}\omega$ model turbulencije, $k\text{-}\omega$ SST model turbulencije, eksperimentalna mjerenja, metoda konačnih volumena, PISO/SIMPLE algoritam, koeficijent uzgona, koeficijent otpora

SUMMARY

The aim of this bachelor thesis was to model turbulent flow ($Re = 2 \cdot 10^5$) around the NLF(1) – 0115 airfoil with the help of the k - kl - ω turbulence model. Numerical simulations were done at three angles of attack: 0° , 5° and 10° . The coefficient of drag and lift was calculated at the mentioned angles of attack and compared to the results calculated using the XFOIL code. The accuracy of the k - kl - ω turbulence model was analysed in the following way:

1. The drag coefficient of a cylinder at $Re = 1 \cdot 10^5$ was calculated with the help of the k - kl - ω turbulence model.
2. The calculated drag coefficient was then compared to those obtained experimentally and by numerical simulations using the k - ω SST turbulence model.

Key words: aerodynamics, airfoil, turbulence, URANS, k - kl - ω turbulence model, k - ω SST turbulence model, experimental results, finite volume method, PISO/SIMPLE algorithm, coefficient of drag, coefficient of lift

1. UVOD

Aerodinamika je znanost koja proučava strujanje zraka oko različitih tijela. Ona nam daje uvid u fizikalne pojave tijekom opstrujavanja tijela te u konačnici i sile otpora i uzgona koje djeluju na tijelo. U zrakoplovnoj industriji se znanja iz aerodinamike koriste kako bi se adekvatno konstruirali zrakoplovi na kojima će djelovati što veća sila uzgona uz što manju silu otpora. Stoga je aerodinamika temelj zrakoplovstva. Aerodinamika se može podijeliti na više načina ovisno o razmatranom problemu

1. Podzvučna i nadzvučna aerodinamika
2. Stlačiva i nestlačiva aerodinamika
3. Aerodinamika neviskoznog i viskozno strujanja

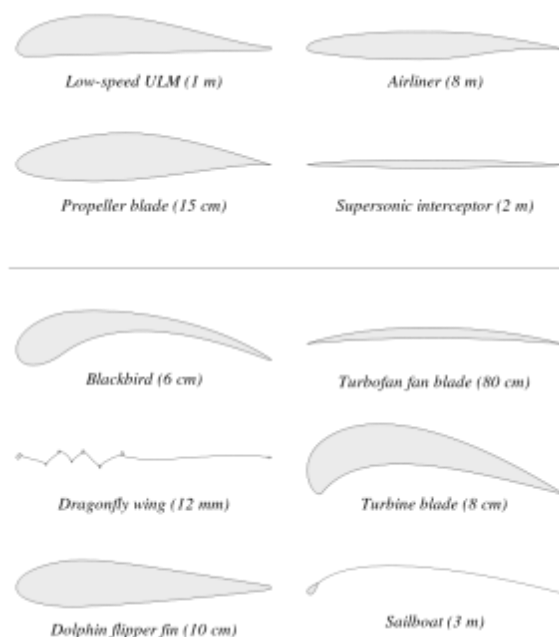
Do nedavno je aerodinamika bila čisto teorijsko eksperimentalna znanost. Razvojem računala se razvila računalna aerodinamika (tj. računalna dinamika fluida) koja je sada nezaobilazni dio kod analize problema strujanja.

Cilj ovog završnog zadatka je modelirati strujanje oko NLF(1) – 0115 aeroprofila pomoću $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije te usporediti dobivene koeficijente otpora i uzgona sa eksperimentalnim mjerenjima. Prednost $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije nad ostalim modelima turbulencije je što on modelira laminarni granični sloj kao i njegov razvoj u turbulentni granični sloj [4]. Stoga će se strujanje modelirati pri nižem Reynoldsovom broju ($Re = 2 \cdot 10^5$) pri kojem će značajni dio graničnog sloja na aeroprofilu biti laminaran. Nažalost, za odabrani aeroprofil ne postoje eksperimentalna mjerenja pa će se valjanost $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije provjeriti uspoređivanjem koeficijenta otpora cilindra dobivena eksperimentalnim mjerenjima sa onim dobivenim pomoću navedenog modela turbulencije. Koeficijent otpora dobiven pomoću $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela će se usporediti i sa onim dobivenim pomoću $k\text{-}\omega$ SST modela turbulencije. I u ovoj numeričkoj simulaciji će se proračun strujanja provoditi pri nižem Reynoldsovom broju ($Re = 1 \cdot 10^5$) pri kojem će granični sloj sve do separacije biti laminaran [25]. Time se želi pokazati prednost $k\text{-}kl\text{-}\omega$ modela turbulencije nad $k\text{-}kl\text{-}\omega$ SST koji pretpostavlja turbulentni granični sloj. Koeficijenti otpora i uzgona za NLF(1)

– 0115 aeroprofil će se računati za napadne kuteve 0° , 5° i 10° . Iako se dobiveni rezultati neće moći usporediti sa eksperimentalnim, oni će se usporediti sa rezultatima dobivenim Drelinim matematičkim kodom XFOIL koji se koristi za konstruiranje aeroprofila pri nižim Reynoldsovim brojevima [18].

1.1. Aeroprofil

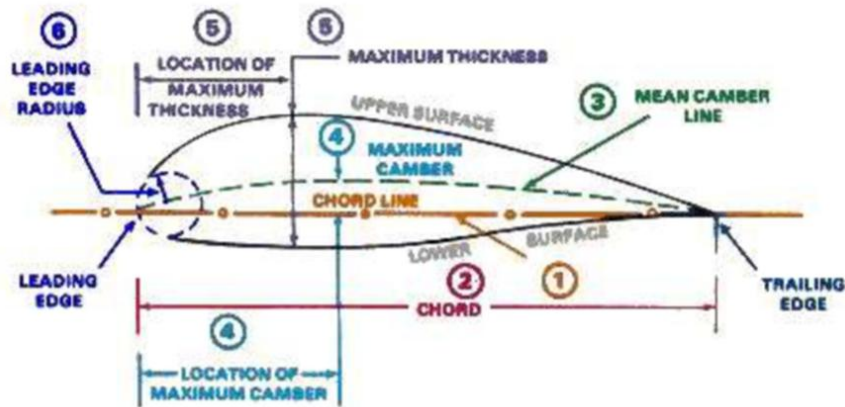
Aerodinamički profil ili aeroprofil je poprečni presjek krila letjelice, turbinske lopatice, propolera ili rotora helikoptera. Sila uzgona i otpora se stvaraju na bilo koje tijelo koje se giba kroz fluid pa tako i na aeroprofil. Cilj aerodinamički oblikovanih tijela, kao što su aeroprofili, je da se njenim gibanjem kroz fluid generira adekvatna sila uzgona uz što manju silu otpora. Aeroprofili su konstruirani za različite najmene pa se stoga i njihov oblik razlikuje, kao što je prikazano na *Slici 1.1* [28]



Slika 1.1 Karakteristični oblici aerodinamičkih profil različitih namjena

1.1.1. Karakteristične veličine aerodinamičkog profila

Na Slici 1.2 [26] su prikazane geometrijske veličine aeroprofila



Slika 1.2 Geometrijske veličine aeroprofila

1. Os profila (engl. Chord line)

Je pravac koji spaja vodeći vrh (nos) sa završnim vrhom (rep) profila i dijeli ga na gornju (iznad osi) i donju (ispod osi) površinu. [26][27].

2. Duljina profila (engl. Chord)

Je duljina osi profila, odnosno udaljenost od nosa do repa profila [26][27].

3. Srednjica profila (engl. Mean camber line)

je krivulja na kojoj je svaka točka jednako udaljena od gornjeg i donjeg ruba profila. Kod simetričnih profila srednjica se podudara s njegovom osi profila.[26][27].

4. Zakrivljenost profila (engl. Maximum Camber)

Predstavlja najveću međusobnu udaljenost osi i srednjice profila [26].

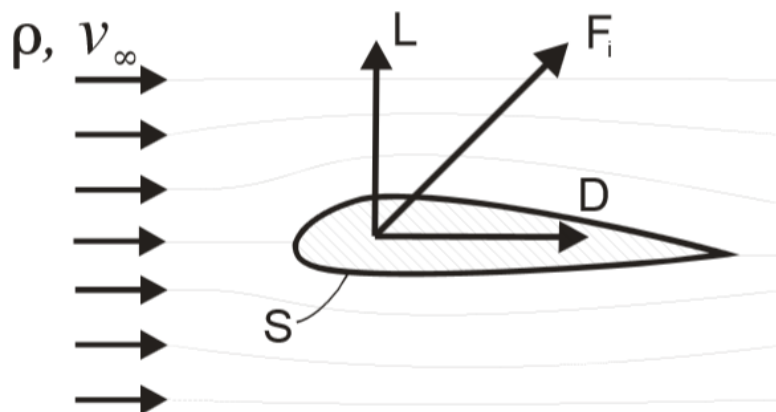
5. Najveća debljina profila (engl. Maximum Thickness)

Je maksimalna udaljenost između gornjeg i donjeg ruba profila [26].

6. Radius nosa aeroprofila (engl. Leading edge radius)

Definira zakrivljenost nosa aeroprofila. [26].

1.1.2. Aerodinamičke sile vezane za aeroprofil



Slika 1.3 Prikaz sile na aerodinamičko tijelo

Rezultantna sila fluida na tijelo jednaka je integralu površinskih sila po površini tijela [3]

$$F_i = \int_S \sigma_{ji} n_j dS = - \int_S p n_i dS + \int_S \Sigma_{ji} n_j dS \quad (1.1)$$

Gdje je $-\int_S p n_i dS$ doprinos sile tlaka, a $\int_S \Sigma_{ji} n_j dS$ doprinos viskoznih sila.

Rezultantna aerodinamička sila na tijelo se rastavlja na dvije komponente

1. Komponenta D (ili F_D), što označuje silu optora
2. Komponenta L (ili F_L), što označuje silu uzgona

Sile otpora i uzgona se najčešće prikazuju u bezdimenzijskim oblicima i to koeficijentima otpora i uzgona.

Koeficijent otpora je

$$C_D = \frac{D}{q_\infty A_{ref}} \quad (1.2)$$

Koeficijent uzgona je

$$C_L = \frac{L}{q_\infty A_{ref}} \quad (1.3)$$

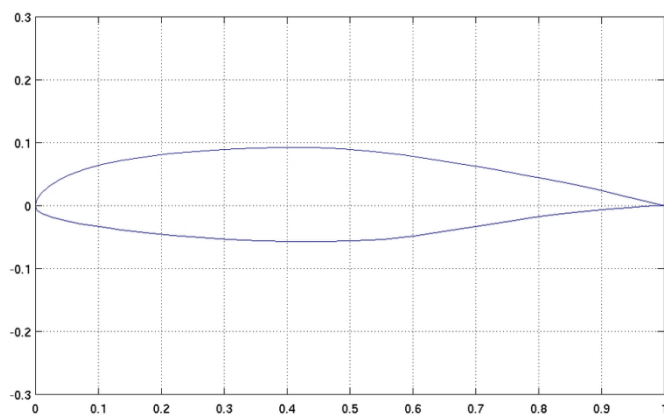
Gdje je $q_\infty = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ dinamički tlak, a A_{ref} površine gledano odozgo na aeroprofil. Silu otpora čine tlačne i viskozne sile. Doprinos sili otpora od tlačnih sila se naziva otpor oblika, a od viskoznih sila otpor trenja [3].

1.2. NLF (1)-0115 aeroprofil

Odabrani aeroprofil je NLF(1) – 0115. Koordinate NLF(1) – 115 [19][23] i 2D prikaz [22] su dani *Slikama 1.4 i 1.5*.

gornja površina		donja površina	
x/c	y/c	x/c	y/c
0.00000	0.00012	0.00252	-0.00715
0.00270	0.00940	0.01126	-0.01302
0.00954	0.01957	0.02600	-0.01859
0.02048	0.02992	0.04634	-0.02384
0.03560	0.03993	0.07192	-0.02889
0.05494	0.04928	0.10230	-0.03376
0.07855	0.05773	0.13698	-0.03841
0.10644	0.06522	0.17547	-0.04279
0.13842	0.07180	0.21723	-0.04681
0.17420	0.07751	0.26171	-0.05036
0.21335	0.08239	0.30835	-0.05333
0.25536	0.08643	0.35657	-0.05558
0.29969	0.08957	0.40578	-0.05698
0.34578	0.09170	0.45539	-0.05733
0.39307	0.09269	0.50482	-0.05642
0.44103	0.09238	0.55345	-0.05373
0.48908	0.09046	0.60155	-0.04844
0.53711	0.08650	0.65013	-0.04101
0.58540	0.08060	0.69911	-0.03297
0.63378	0.07350	0.74738	-0.02532
0.68161	0.06575	0.79388	-0.01850
0.72820	0.05769	0.83761	-0.01278
0.77287	0.04961	0.87762	-0.00828
0.81494	0.04170	0.91305	-0.00497
0.85376	0.03411	0.94313	-0.00274
0.88867	0.02685	0.96722	-0.00133
0.91933	0.01975	0.98498	-0.00042
0.94579	0.01293	0.99613	-0.00004
0.96792	0.00704	1.00000	0.00000
0.98507	0.00282	—	—
0.99614	0.00060	—	—
1.00000	0.00000	—	—

Slika 1.4 Koordinate NLF(1) – 0115 aeroprofila

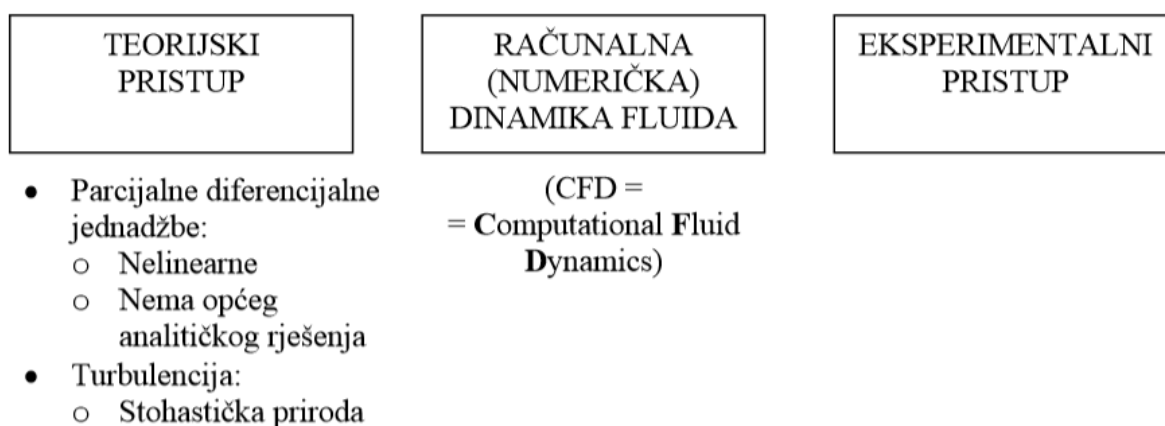


Slika 1.5 2D prikaz NLF(1) – 0115 aeroprofila

2. OPĆENITO O MEHANICI FLUIDA

Mehanika fluida je povijesno bila teorijsko-eksperimentalna znanost. Način rješavanja problema mehanike fluida se danas dijeli na tri grane, kao što je to pokazano na *Slici 2.1* [1]

1. Teorijski pristup
2. Eksperimentalni pristup
3. Računalna dinamika fluida



Slika 2.1 Grane mehanike fluida

2.1. Teorijski pristup

Teorijski pristup temelji se na analitičkom rješavanju matematičkih modela strujanja fluida. Velika prednost općeg analitičkog rješenja je ta što se može analizirati utjecaj pojedinih parametara u matematičkom modelu. Nažalost, analitičko rješenje Navier-Stokesovih jednačbi se može odrediti samo u slučaju laminarnog strujanja i to u vrlo ograničenom broju primjera. Jedan takav primjer bio bi laminarno izobraženo strujanje u cijevima. U inženjerski zanimljivim strujanjima parcijalne diferencijalne Navier-Stokesove jednačbe neće se moći riješiti analitički. Također, većina strujanja interesantna s inženjerskog stajališta su i turbulentna te se neće ni moći opisati analitički [1]. Navedene činjenice su osnovni razlozi zašto su se problemi mehanike fluida u prošlosti uglavnom rješavali ekperimentalnim putem.

2.2. Eksperimentalni pristup

Eksperimentalni pristup je usko povezan s teorijskim pristupom jer se svaka metoda mjerenja temelji na teoriji. Eksperimentalnim pristupom dobiva se vrlo ograničeni broj informacija o nekoj pojavi [1]. Utjecaj pojedinog parametra na ostale fizikalne veličine može se odrediti samo višestrukim ponavljanjem eksperimenata za različite vrijednosti utjecajnih parametara.

2.3. Računalna dinamika fluida (RDF)

Razvojem računala stvorili su se uvjeti za numeričko rješavanje matematičkih modela koji opisuju strujanje fluida. Ta treća i najnovija grana mehanike fluida se naziva računalnom dinamikom fluida. Stadiji cijelokupne numeričke simulacije se mogu opisati na sljedeći način

1. **Definicija problema.** Problem treba opisati parcijalnim diferencijalnim jednačbama, te definirati početne i rubne uvjete adekvatne promatranom problemu.
2. **Konstruiranje geometrije.** Pomoću jednog od raspoloživih CAD alata (npr. SolidWorks, AutoCAD, CATIA itd.) potrebno je konstruirati geometriju na kojoj će se generirati proračunska mreža i izvršiti numerička simulacija.
3. **Diskretizacija područja proračuna.** Računalnim programom (npr. SALOME, Pointwise itd.) treba se generirati proračunska mreža. Kod generiranja mreže treba se voditi računa o raspodjeli veličine konačnih volumena u polju strujanja. Na primjer, u graničnom sloju su gradijenti fizikalnih veličina veliki, a to zahtjeva da područje proračuna bude ispunjeno manjim konačnim volumenima kako bi numerička simulacija obuhvatila promjene fizikalnih veličina sa zadovoljavajućom točnošću..
4. **Diskretizacija parcijalnih diferencijalnih jednačbi.** Diskretizacija se izvodi pomoću raspoloživih numeričkih shema. Ako se promatra problem stacionarnog strujanja potrebne su samo prostorne numeričke sheme. Ako je problem nestacionarnog tipa potrebno je parcijalne diferencijalne jednačbe i vremenski diskretizirati.

5. **Rješavanje diskretiziranog sustava jednačbi.** Računalnim programom (npr. OpenFOAM, FLUENT itd.) se izvodi numerički proračun matematičkog modela sa zadanim početnim i rubnim uvjetima. Za rješavanje sustav jednačbi se koristi jedan od mnogih algoritama na raspolaganju (SIMPLE, PISO, itd.).
6. **Prikazivanje rezultata dijagramima, tablicama i slikama.** Računalnim programom (npr. ParaView) se prikazuju rezultati numeričkog proračuna.

2.3.1. *Primjeri primjene računalne dinamike fluida*

Računalna dinamika fluida ima široko područje primjene kao što su

1. Vanjska aerodinamika
 - a. Strujanje oko automobila, letjelica, građevinskih objekata, vjetroturbina itd.
2. Unuranja aerodinamika
 - a. Strujanja unutar HVAC (Heating, Ventilation, and Air Conditioning) sistema, automobila, cjevovoda,
 - b. modeliranje izgaranja mlaznih motora, motora s unutranjim izgaranjem

Pri projektiranju npr. automobila koristi se računalna dinamika fluida da se dobiju potrebne informacije o utjecaju oblika automobila i karaktera strujanja na sile optora i uzgona. Prethodno bi za takve rezultate bila potrebna eksperimentalna mjerenja. RDF – om se do tih rezultata dolazi jeftinijim i bržim putem. Međutim, treba imati na umu da numeričke simulacije nisu potpuno pouzdane te će rezultati konačnog proizvoda ipak morati biti popraćeni eksperimentalnim mjerenjima.

3. OSNOVE JEDNADŽBE DINAMIKE FLUIDA

Matematički model proračuna temelji se na osnovnim zakonima dinamike fluida u koje spadaju

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja
3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja
4. Zakon očuvanja energije
5. Drugi zakon termodinamike

Ovi zakoni su definirani za sustav materijalnih točaka odnosno za zatvoreni termodinamički sustav [13]. U dinamici fluida će se navedeni zakoni fizike prijemiti na materijalni volumen $V_M(t)$, koji je omeđen materijalnom površinom $S_M(t)$. U općem slučaju materijalni volumen u vremenu mijenja svoj položaj, oblik i veličinu, ali se stalno sastoji od istih čestica [3].

Za nestlačivo izotermno strujanje oko aeroprofila **NLF(1)-0115** će od osnovnih jednadžbi dinamike fluida (1 – 5) zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja momenta količine gibanja biti relevanti. Zakon očuvanja količine gibanja govori da je tenzor naprezanja simetričan [3], dok zakon očuvanja mase i zakon očuvanja količine gibanja predstavljaju Navier – Stokesove jednadžbe za nestlačivo izotermno strujanje fluida. U ovome završnom radu će se samo za prva dva zakona dati matematička definicija.

3.1. Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta)

Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta → brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli [3].

Matematički zapis ovog zakona u integralnom obliku je

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = 0 \quad (3.1)$$

U graničnom slučaju, kada se materijalni volumen smanji na česticu fluida, izraz (3.1) prelazi u sljedeći oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

Takav oblik zapisa naziva se konzervativni oblik zakona očuvanja mase. Za nestlačivo strujanje zakon očuvanja mase je

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.3)$$

On izražava činjenicu da nema promjene volumena čestice fluida.

3.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja → brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen [3].

Matematički zapis zakona očuvanja količine gibanja u integralnom obliku je

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho v_i dV = \int_{V_M(t)} \rho f_i dV + \int_{V_M(t)} \sigma_i dV = \int_{V_M(t)} \rho f_i dV + \int_{S_M(t)} n_j \sigma_{ij} dS \quad (3.4)$$

Poznavajući sljedeće relacije

$$\textbf{Pravilo A} \quad \frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho \varphi dV = \int_{V_M(t)} \rho \frac{D\varphi}{Dt} dV \quad (3.5)$$

$$\textbf{Gauss-Ostrogradski teorem} \quad \oint_S \bullet n_j dS = \iiint_V \frac{\partial \bullet}{\partial x_j} dV \quad (3.6)$$

Izraz (3.4) se može zapisati kao

$$\int_{V_M(t)} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_{V_M(t)} \rho f_i dV + \int_{V_M(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (3.7)$$

U graničnom slučaju, kada se materijalni volumen smanji na česticu fluida, izraz (3.7) prelazi u sljedeći oblik

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

Poznavajući relaciju za materijalnu derivaciju

$$\textbf{Pravilo B} \quad \rho \frac{D\varphi}{Dt} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

Izraz (3.8) se može napisati kao

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

3.3. Konstitutivne Jednadžbe

U ovome završnom radu se koristi jedna konstitutivna jednadžba koja povezuje naprezanje σ_{ij} s brzinom v_i i tlakom p i zove se Newtonov zakon viskoznosti [3].

3.3.1. Newtonov zakon viskoznosti

Newtonov zakon viskoznosti [3] uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije (simetričnog dijela gradijenta brzine). Tenzor naprezanja se može napisati u obliku

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (3.11)$$

gdje je δ_{ji} jedinični tenzor, a Σ_{ji} simetrični tenzor viskoznih naprezanja, koji se uz pretpostavku izotropnosti fluida može modelirati sljedećim izrazom

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) D_{kk} \delta_{ji} \quad (3.12)$$

gdje je μ dinamička viskoznost, μ_v volumenska viskoznost, a D_{ji} tenzor brzine deformacije. Utjecaj volumenske viskoznosti je značajan u strujanjima s velikim gradijentima gustoće, kao što su udarni valovi i eksplozije [3]. Volumenska viskoznost jednoatomnih plinova jednaka je nuli, a u strujanjima gdje je brzina promjene volumena čestice fluida mala koeficijent volumenske viskoznosti se može zanemariti.

Za nestlačivo strujanje jednadžba (3.12) je

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\mu D_{ji} \quad (3.13)$$

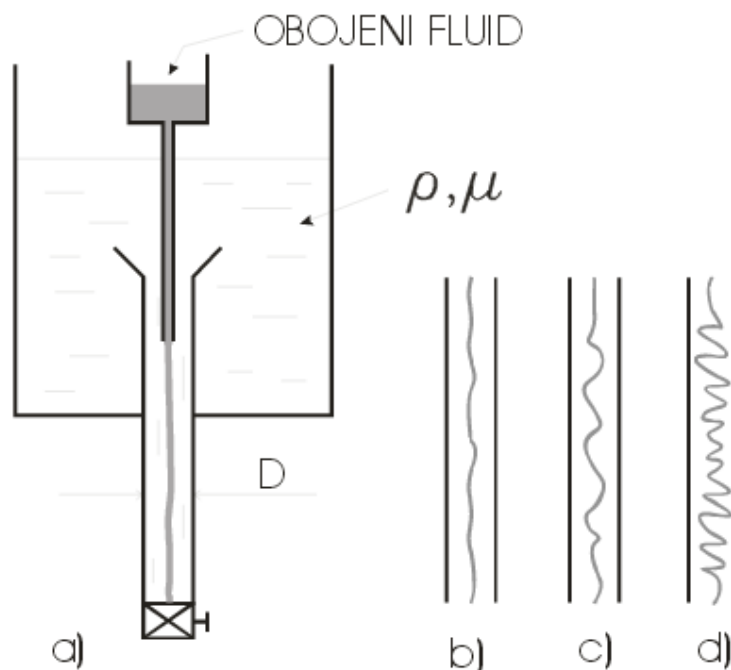
Uvrštavanjem jednadžbe (3.11) i (3.13) u jednadžbu (3.10) se dobije diferencijalna jednadžba količine gibanja.

4. TURBULENCIJA

Turbulentno strujanje fluida je najčešći oblik strujanja u prirodi, te je funkcija Reynoldsovog broja. Primjeri strujanja fluida koji su najčešće turbulentni su

1. strujanje zraka oko vlaka, automobila, te zrakoplova
2. strujanje zraka oko građevinskih objekata
3. strujanje vode oko brodskog trupa
4. strujanje u vodovodima i plinovodima

Može se zaključiti da je turbulentno strujanje uvjetovano Reynoldsovim brojem pomoću Reynoldsovog eksperimenta koji je prikazan na *Slici 4.1* [3]. Reynolds je u tom eksperimentu prikazao tri karakteristične faze strujanja fluida: laminarno, tranzijento, i turbulentno strujanje.



Slika 4.1 Reynoldsov eksperiment

Kako bi pokazao prijelaz strujanja iz laminarnog u turbulentni režim, Reynolds je u svojem eksperimentu kroz sredinu prozirne cijevi puštao obojeni tanki mlaz tekućine.

Strujanje u cijevi prikazanoj na *Slici 4.1* definirano je Reynoldsovim brojem

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (4.1)$$

gdje je L karakteristična duljina ($L=D$ za cjevovode).

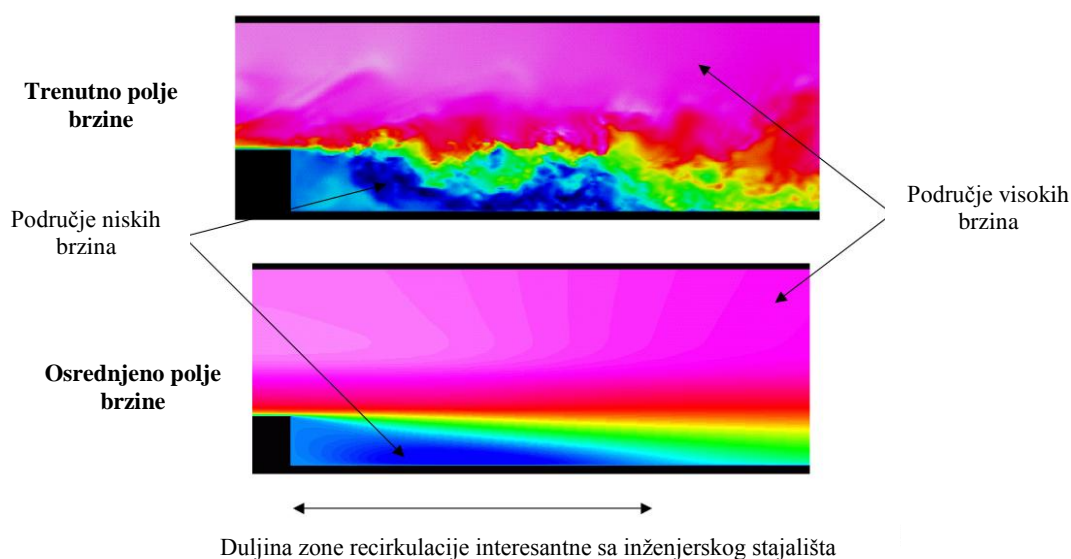
Reynoldsov broj se u eksperimentu mijenjao pomoću ventila na kraju cijevi. Pri niskim vrijednostima Reynoldsovog broja obojeni mlaz ostaje ravan (slučaj pod(a)). Iz toga se može zaključiti da se radilo o izrazito laminarnom strujanju fluida. Povećanjem Reynoldsovog broja do određene vrijednosti ($Re_{krit, donja}$), obojeni mlaz počinje gubiti stabilnost (slučaj pod (b)). Daljnjim povećanjem Reynoldsovog broja nestabilnost se nastavlja povećavati te dolazi do periodičkog iskrivljavanja obojenog mlaza (slučaj pod (c)) [3]. Kada vrijednost Reynoldsovog broja naraste iznad određene vrijednosti ($Re_{krit, gornja}$) nestabilnost se naglo povećava, te mlaz obojene tekućine praktički ispunjava čitav presjek cijevi (slučaj pod (d)). To ukazuje na poprečno gibanje čestica fluida. Iz toga se da zaključiti da se radi o turbulentnom strujanju. U slučajevima (b) i (c) strujanje fluida je tranzijento. Reynoldsov broj kod kojeg se pojavljuje prva nestabilnost strujanja se naziva kritičnim Reynoldsovim brojem [3] (Re_{krit}). Vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja nije definirana već je zavisna od

- (1) oblika ulaza u cijev
- (2) hrapavosti stijenke cijevi
- (3) odstupanja od kružnog oblika poprečnog presjeka cijevi
- (4) čistoće fluida
- (5) vanjskih utjecaja (npr. vibracije cijevi)

Uzimajući navedeno u obzir, definira se donja i gornja vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja. Donja vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja je ona vrijednost ispod kojega su sve male perturbacije prigušene pa je strujanje laminarno. Gornja vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja je ona vrijednost iznad koje je strujanje uvijek turbulentno. Tranzijentno područje, u kojem strujanje može biti i laminarno i turbulentno, nalazi se između gornje i donje kritične vrijednosti Reynoldovog broja [15]. Za okrugle cijevi s oštrim ulaznim bridom je $Re_{krit, donja}=2320$ a $Re_{krit, gornja}=40000$ (granična vrijednost laminarnog strujanja posignuta u laboratorijskim uvjetima) [3].

4.1. Reynolds – Averaged Navier Stokes (RANS) pristup za rješavanje turbulentnog strujanja

Iz prethodnog poglavlja se može zaključiti o izrazito kaotičnom karakteru turbulentnog strujanja. U takvom strujanju sve fizikalne veličine pokazuju pulsacije u širokom spektru frekvencija i valnih duljina [3]. Pri direktnom numeričkom rješavanju Navier-Stokesovih jednadžbi prostorna diskretizacija područja proračuna morala bi biti tako mala da se obuhvate sve amplitude pulsacija. Vremenski korak bi također morao biti tako sitan da se obuhvate sve frekvencije turbulentnih pulsacija. Takav pristup numeričkog rješavanja turbulentnog strujanja se zove **Direktna Numerička Simulacija (DNS)** [1]. Naime, Navier-Stokesove jednadžbe se tada rješavaju bez ikakvog osrednjavanja i modela turbulencije, te ovaka računalna simulacija sadrži samo numeričku grešku diskretizacije. S inženjerskog stajališta je ovakav pristup neprikladan jer je s računalnog stajališta jako skup. Inženjere također obično neće zanimati fluktuacije fizikalnih veličina već prosječne vrijednosti. Stoga se nameće ideja da se fizikalne veličine u Navier-Stokesovim jednadžbama osrednje, te da se rješavaju jednadžbe za osrednjene veličine. Tada vremenski koraci i veličina prostorne diskretizacije ne moraju biti tako mali kao kod DNS-a. Osrednjavanjem Navier – Stokevih jednadžbi dobivaju se **Reynolds – Averaged Navier Stokes (RANS)** jednadžbe [1]. U njima se pojavljuje predstavnik pulsirajućeg strujanja $-\rho \overline{v_i'v_j'}$ koji se modelira pomoću prikladnog modela turbulencije [3], kao što će biti objašnjeno kasnije. Na *Slici 4.2* [10] je prikazano polje brzine dobiveno DNS i RANS pristupom uz strujanje uslijed naglog proširenja.



Slika 4.2 Usporedba dva pristupa: DNS i RANS

Iz Slike 4.2 se vidi da je DNS i RANS pristupom dobivena "ista" duljina zone recirkulacije. DNS – om je dobiveno puno detaljnije polje brzine, ali je zato bila potrebna znatno gušća mreža i više računalnog vremena. Pošto je s inženjerskog stajališta u razmatranom problemu obično bitna duljina recirkulacije, RANS modeli za numeričku simulaciju će biti prikladniji. Većina numeričkih simulacija strujanja su u industriji izvedene korištenjem RANS modela [7].

4.1.1. RANS jednadžbe za nestlačivo strujanje

Za nestlačivo turbulentno strujanje vrijedi da je $\rho = konst.$. Utjecaj masenih sila se također zanemaruje ($f_i = 0$). Za osrednjavanje Navier – Stokesovih jednadžbi je potrebno poznavati sljedeće relacije

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} \quad (4.4)$$

$$\bar{f'} = 0 \quad (4.5)$$

$$\overline{\bar{f} + f'} = \bar{\bar{f}} + \bar{f'} = \bar{f} \quad (4.6)$$

$$\overline{f \cdot g} = \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} \quad (4.7)$$

Polje brzina v_i i polje tlaka p se može prikazati zbrojem osrednje vrijednosti i pulsirajućeg dijela

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (4.8)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.9)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (4.8) i (4.9) u jednadžbu kontinuiteta i jednadžbu količine gibanja dobivaju se

Jednadžba kontinuiteta za nestlačivo strujanje

$$\frac{\partial(\overline{v_j} + v_j')}{\partial x_j} = 0 \quad (4.10)$$

Jednadžba količine gibanja za nestlačivo strujanje

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial(\overline{v_i} + v_i')}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(\overline{v_j} + v_j')(\overline{v_i} + v_i')]}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vremenskim osrednjavanjem jednadžbi (4.10) i (4.11) pomoću danih relacija (4.2) – (4.7) dobiva se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje

$$\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.12)$$

i jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje

$$\rho \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v_j v_i}) = - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v_i' v_j'} \right] \quad (4.13)$$

Za slučaja nestacionarnog RANS-a (Unsteady RANS - kakav će se i koristiti u ovome završnom radu) nema smisla Navier – Stokes jednadžbe osrednjavati po vremenu već se osrednjavanje radi po ansamblu [6]. Osrednjavanjem po ansamblu su krajnje osrednjene jednadžbe formalno istog oblika kao i jednadžbe (4.12) i (4.13), ali imaju drugačiju interpretaciju.

Jednadžbe (4.12) i (4.13) nazivaju se *Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) jednadžbe*, te one predstavljaju su skup vremenski osrednjenu jednadžbi kontinuiteta i količine gibanja. Iako se jednadžbe (4.12) i (4.13) odnose samo na osrednjeno strujanje, pulsirajuće strujanje se neće moći u potpunosti zanemariti zbog zadnjeg člana $-\rho \overline{v_i' v_j'}$ u jednadžbi (4.13). Taj član označuje turbulentnu difuziju količine gibanja [3]. Turbulentna difuzija je proces prijenosa količine gibanja putem turbulentnog miješanja skupine čestica fluida. Za turbulentnu viskoznost μ_t je odgovorna turbulentna difuzija količine gibanja odgovorna. Turbulentna

viskoznost μ_t je isključivo posljedica režima strujanja, a ne fizikalnog svojstva fluida [1]. U laminarnom strujanju je ona jednaka nuli. Turbulentna difuzija količine gibanja se naziva turbulentno ili Reynoldsovo naprežanje. Reynoldsovo naprežanje je simetrični tenzor sa šest nepoznanica

$$-\overline{\rho v_i v_j} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v_1 v_1} & -\overline{\rho v_1 v_2} & -\overline{\rho v_1 v_3} \\ -\overline{\rho v_2 v_1} & -\overline{\rho v_2 v_2} & -\overline{\rho v_2 v_3} \\ -\overline{\rho v_3 v_1} & -\overline{\rho v_3 v_2} & -\overline{\rho v_3 v_3} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Jasno je da Reynoldsove jednačbe imaju više nepoznanica nego jednačbi. Stoga je cilj modela turbulencije uskladiti broj nepoznanica i jednačbi, pritom zaustavljajući se na određenoj korelaciji [3].

4.1.2. Modeli turbulencije

Opći zahtjevi [3] modela turbulencije su:

1. Univerzalnost
2. Točnost
3. Ekonomično rješavanje
4. Jednostavnost

Vezu između Reynoldsovih naprežanja i tenzora brzine deformacije je predložio Boussinesq. Hipoteza Boussinesq-a predstavlja model turbulencije kojim se modelira šest komponenti tenzora Reynoldsovih naprežanja jednim nepoznatim poljem koeficijenta turbulentne viskoznosti [1]

$$-\overline{\rho v_i v_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (4.15)$$

gdje je μ_t koeficijent turbulentne viskoznosti. Član s kinetičkom energijom $k = \frac{\overline{v_i v_i}}{2}$ je dodan u cilju zadovoljavanja gornje jednačbe za slučaj kontrakcije indeksa [3].

Nepoznato polje μ_t , ovisno o modelu turbulencije, će se modelirati pomoću jedne ili više transportnih jednačbi (jedino Prandtlova hipoteza miješanja nema niti jednu dodatnu transportnu jednačbu). Modeli turbulencije s pripadajućim brojem dodatnih transportnih jednačbi su prikazani u *Tablici 4.1* [2].

Tablica 4.1 Broj dodatnih transportnih jednačbi ovisno o modelu turbulencije

Broj dodatnih transportnih jednačbi	Ime modela turbulencije
Nula	Prandtlova hipoteza miješanja
Jedan	Spalart-Allmaras model
Dva	$k-\varepsilon$ model
	$k-\omega$ model
Tri	$k-kl-\omega$ model
Sedam	Reynoldsov model turbulencije

4.1.2.1. $k-kl-\omega$ model turbulencije

U ovome završnom radu je korišten noviji $k-kl-\omega$ model turbulencije. $k-kl-\omega$ modelira koeficijent turbulentne viskoznosti pomoću tri dodatne transportne jednačbe (za k , kl i ω). Svrha ovog modela turbulencije je da s dovoljnom točnošću opiše tranzicijsko strujanje [4]. Kod tranzicijskog strujanja dolazi do razvoja laminarnog graničnog sloja u turbulentni granični sloj [4], zbog sve većih pulsacija brzina u laminarnom graničnom sloju (uvjetovano pulsacijama brzina iz neporemećenog dijela strujanja) [4][8][11][12]. $k-kl-\omega$ model turbulencije, temeljen na familiji $k-\omega$ modela turbulencije, ima i treću transportnu jednačbu za kl pomoću koje predviđa veličine pulsacija brzina u predtranzicijskom laminarnom graničnom sloju [4]. Upravo je i to prednost ovog modela turbulencije nad ostalim, često korištenim modelima, koji nemaju mogućnost predviđanja razvoja laminarno – turbulentnog graničnog sloja [4]. Ovaj model turbulencije je *low-Re* model turbulencije što znači da će se rješavati svi detalji strujanja do unutar viskoznog podsloja. Stoga veličina prvih ćelija u proračunskoj mreži moraju imati $y^+ < 1$ [4].

Transportne jednačbe za k - k_L - ω model turbulencije su:

- 1) Transportna jednačba za turbulentnu kinetičku energiju k (k_T)

$$\frac{Dk_T}{Dt} = P_{k_T} + R_{BP} + R_{NAT} - \omega k_T - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right] \quad (4.16)$$

- 2) Transportna jednačba za laminarnu kinetičku energiju k_L

$$\frac{Dk_L}{Dt} = P_{k_L} - R_{BP} - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right] \quad (4.17)$$

- 3) Transportna jednačba za turbulentnu frekvenciju ω

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = & C_{\omega 1} \frac{\omega}{k_T} P_{k_T} + \left(\frac{C_{\omega R}}{f_W} - 1 \right) \frac{\omega}{k_T} (R_{BP} + R_{NAT}) - C_{\omega 2} \omega^2 + \\ & + C_{\omega 3} f_{\omega} \alpha_T f_W^2 \frac{\sqrt{k_T}}{d^3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_{\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Fizikalno značenje članova koji se pojavljuju u jednadžbama (4.16), (4.17) i (4.18) su

P_{k_T}	Produkcija turbulentne kinetičke energije putem tenzora brzine deformacija [4] tj. brzina transformacije kinetičke energije neporemećenog strujanja u kinetičku energiju turbulentnih pulsacija [6]	$\frac{m^2}{s^3}$
P_{k_L}	Produkcija laminarne kinetičke energije putem tenzora brzine deformacije [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
R_{BP}	Produksijski član uzrokovan <i>bypass</i> tranzicijom [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
R_{NAT}	Produksijski član uzrokovan <i>prirodnom</i> tranzicijom [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$\omega k_T (= \varepsilon)$	Brzine disipacije turbulentne kinetičke energije po jedinici mase [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
D_T	Anizotropni disipacijski član (u blizini zida) za turbulentnu kinetičku energiju k_T [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
D_L	Anizotropni disipacijski član (u blizini zida) za laminarnu kinetičku energiju k_L [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$C_{\omega 2} \omega^2$	Destruksijski član turbulentne kinetičke energije k_T [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$C_{\omega 1} \frac{\omega}{k_T} P_{k_T}$	Produksijski član turbulentne kinetičke energije k_L [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$C_{\omega 3} f_{\omega} \alpha_T f_w^2 \frac{\sqrt{k_T}}{d^3}$	Član koji osigurava smanjenje turbulentne skale duljine u vanjskim dijelovima turbulentnog graničnog sloja [4]. Ovo je nužno za osiguravanje točne predikcije područja separacije graničnog sloja [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$\left(\frac{C_{\omega R}}{f_w} - 1 \right) \frac{\omega}{k_T} (R_{BP} + R_{NAT})$	Produksijski član uzrokovan tranzicijom [4]	$\frac{m^2}{s^3}$
$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right]$	Član koji predstavlja transport laminarne kinetičke energije k_L putem difuzije	$\frac{m^2}{s^3}$
$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right]$	Član koji predstavlja transport turbulentne kinetičke energije k_T putem turbulentne difuzije [2]	$\frac{m^2}{s^3}$
$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_{\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$	Član koji predstavlja transport turbulentne frekvencije ω putem turbulentne difuzije [2]	$\frac{m^2}{s^3}$

4.1.2.2. Rubni uvjeti k - kl - ω model turbulencije

Rubni uvjeti za k - kl - ω model turbulencije su sljedeći

1. Na zidovima [4]

$$k_T = k_L = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad (4.19)$$

gdje je n normala na nepropusnu površinu

2. Na ulazu se k_L , k_T i ω računaju pomoću sljedećih jednažbi [4]

$$Tu_\infty = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k_T}}{U_\infty} \quad (4.20)$$

$$\lambda_T = \frac{\sqrt{k_T}}{\omega} \quad (4.21)$$

Gdje su

$Tu_\infty \rightarrow$ intenzitet turbulencije

$k_T \left[= \frac{1}{2}(\overline{v_i^2}) \right] \rightarrow$ turbulentna kinetička energija

$U_\infty \rightarrow$ brzina neporemećnog strujanja

$\lambda_T \rightarrow$ duljinska skala turbulencije

$\omega \rightarrow$ vremenska skala turbulencije

Iz jednažbe (4.20), uz poznati intenzitet turbulencije Tu_∞ i brzine U_∞ neporemećnog strujanja, izračunava se k_T na ulazu. Uvrštavanjem izračunatog k_T i zadane turbulentne skale duljine λ_T u jednažbu (4.21) dobiva se turbulentna frekvencija ω na ulazu.

3. Na izlazu [4]

$$\frac{\partial k_T}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial k_L}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad (4.22)$$

5. METODA KONAČNIH VOLUMENA (MKV)

Osnovna metoda konačnih volumena je integralna metoda koja temeljena na integraciji konzervativnog oblika transportnih jednadžbi po konačnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna [1]. U osnovnoj metodi konačnih volumena svaki konačni volumen ima jedan proračunski čvor i po jednu evaluacijsku točku na svakoj stranici (*Slika 5.1*). Problem strujanja Newtonovog fluida se može opisati sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s odgovarajućim rubnih uvjetima. Međutim opće analitičko rješenje će postojati samo u ograničenom broju slučajeva kao što je laminarno izobraženo strujanje u cijevima. Većina problema vezanih uz strujanje fluida neće imati opće analitičko rješenje te će se parcijalne diferencijalne jednadžbe morati svesti pomoću numeričkih metoda (MKV) na algebarski sustav jednadžbi koji je moguće riješiti. Prednost metode konačnih volumena je ta što dozvoljava proračun na proizvoljnim nestrukturiranim mrežama, pa je time pogodna za korištenje kod diskretizacije područja kompliciranih geometrija [6].

Integral konzervativnog oblika skalarne transportne jednadžbe veličine φ po konačnom volumenu prema Slici 5.1 je

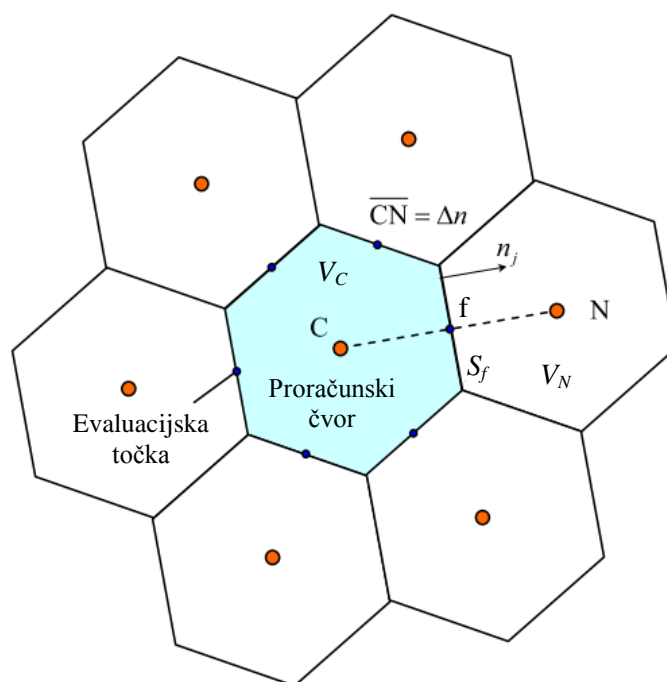
$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \varphi dV}_{\text{Brzina promjene sadržaja } \varphi \text{ u } \Delta V} = - \underbrace{\oint_{\Sigma S_f} (\rho v_j n_j \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j) dS_f}_{\text{Konvektivni i difuzijski protok } \varphi \text{ kroz granice}} + \underbrace{\int_V S_\varphi dV}_V \quad (5.1)$$

gdje su

$\rho v_j n_j \varphi \rightarrow$ Površinska gustoća normalne komponente konvektivnog toka fizikalne veličine φ kroz rub S_f

$\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j \rightarrow$ Površinska gustoća difuzijskog toka fizikalne veličine φ kroz rub S_f , gdje je

Γ_φ koeficijent difuzije fizikalne veličine φ



Slika 5.1 Dio idealno diskretiziranog područja proračuna

Riječima se jednadžba (5.1) može opisati na sljedeći način [1]

Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena razmjerna je brzini protoka tog fizikalnog svojstva kroz granice konačnog volumena i brzini nastajanja (izvor) i nestajanja (ponor) tog fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena.

Protok fizikalnog svojstva definiran je kao pozitivan kada napušta konačni volumen, a kao negativan kada ulazi u isti [1].

5.1. Diskretizacija integralne transportne jednadžbe

Diskretizacija integrala skalarne integralne jednadžbe se vrši aproksimacijom volumnih i površinskih integrala. Prilikom njihove aproksimacije proračunski čvor C je težište kontrolnog volumena C , a evaluacijske točke f su težišta pojedinih stranica kontrolnog volumena (Slika 5.1).

Volumenski i površinski integrali, koji se pojavljuju u jednažbi (5.1) se mogu preoblikovati sukladno integralnom teoremu o srednjoj vrijednosti

$$\int_V \rho \varphi dV = \rho \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V \quad (5.2)$$

gdje je $\bar{\varphi}_{\Delta V}$ srednja vrijednost fizikalne veličine φ unutar konačnog volumena. Pretpostavlja se da je veličina konačnih volumena diskretiziranog područja dovoljno mala tako da se promjena veličine φ unutar pojedinog konačnog volumena može aproksimirati linearnom raspodjelom oko vrijednosti u čvoru C. Pošto je čvor C ujedno i težište kontrolnog volumena ΔV , vrijediti će sljedeća relacija

$$\bar{\varphi}_{\Delta V} = \varphi_C \quad (5.3)$$

Taylorovim razvoje se može pokazati da osnovna metoda konačnih volumena s centrom u težištu konačnog volumena egzaktno integrira linearna polja [1]. Uzimajući u obzir relacije dane jednažbama (5.2) i (5.3) prvi član u jednažbi (5.1), član lokalne promjene, se može aproksimirati na sljedeći način

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varphi dV = \frac{d}{dt} (\rho \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V) \approx \frac{d}{dt} (\rho \varphi_C \Delta V) = \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V \quad (5.4)$$

Analogno se aproksimira integral izvorskog člana

$$\int_V S_\varphi dV = \bar{S}_{\varphi, \Delta V} \Delta V \approx S_C \Delta V \quad (5.5)$$

Konveksijski i difuzijski protok fizikalne veličine φ je definiran površinskim integralom u jednadžbi (5.1). Prvi član s desne strane jednadžbe (5.1) predstavlja ukupni vektor toka J_j . Međutim, protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka $J_j n_j$ pa slijedi da je za svaku površinu S_f

$$\begin{aligned} J_n &= \int_S (\rho v_j n_j \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j) dS_f = \\ &= \int_S (\rho v_n \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS_f = \left[\overline{\rho(v_n \varphi)} - \Gamma_\varphi \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right) \right]_{S_f} \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdje je

$v_j n_j = v_n \rightarrow$ normalna komponenta brzine na S_f stranici konačnog volumen

$\overline{v_n \varphi} \rightarrow$ srednja vrijednost umnoška normalne komponente vektora brzine na stranici S_f i fizikalne vrijednosti φ na stranici S_f

$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \rightarrow$ srednja vrijednost normalne derivacije fizikalnog svojstva φ na stranici S_f

Površinska gustoća normalne komponenta vektora konvektivnog toka $(\overline{\rho v_n \varphi})_{S_f}$ aproksimira se na sljedeći način

$$(\overline{\rho v_n \varphi})_{S_f} \approx \rho v_{n,f} \varphi_f \quad (5.7)$$

gdje je

$v_{n,f} \rightarrow$ vrijednost normalne komponente vektora brzine u točki f, koja predstavlja težište površine S_f

$\varphi_f \rightarrow$ vrijednost fizikalne veličine φ u točki f

Površinska gustoća normalne komponente vektora difuzijskog toka $\left[\Gamma_{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \right]_{S_f}$ se

aproksimira na sljedeći način

$$\left[\Gamma_{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \right]_{S_f} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_f \quad (5.8)$$

gdje je

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_f \rightarrow$ vrijednost normalne derivacije fizikalne veličine φ u točki f

Normalna derivacija će se u sljedećim jednadžbama pojavljivati u bezdimenzijskim koordinatima uvrštavajući relaciju $\tilde{n} = \frac{n}{\Delta n}$.

Uvrštavajući jednadžbe (5.7) i (5.8) u jednadžbu (5.6) slijedi

$$J_n = \underbrace{\rho v_{n,f} S_f}_{F} \varphi_f - \underbrace{\frac{\Gamma_{\varphi} S_f}{\Delta n}}_D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_f = F \varphi_f - D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_f \quad (5.9)$$

gdje je $F = \rho v_{n,f} S_f$ jačina konvekcije, a $D = \frac{\Gamma_{\varphi} S_f}{\Delta n}$ jačina difuzije. Omjer jačina konvekcije

i difuzije $Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho v_{n,f} \Delta n}{\Gamma_{\varphi}}$ se naziva lokalni Pecletov broj. Što je Pecletov broj veći to je

veći i utjecaj konvekcijskog transporta, dok mali Pecletov broj ukazuje na to da je utjecaj difuzijskog transporta dominantan. Ovisno o Pecletovom broju ovisi utjecaj susjednih čvorova na čvor C. Numeričke sheme koje uzimaju to u obzir imaju svojstvo transportivnosti [1]. Svojstvo transportivnosti je izuzetno bitno ukoliko se želi dobiti točniji numerički proračun, kao što će biti objašnjeno kasnije.

Uvrštavajući jednačbe (5.4), (5.5) i (5.9) u jednačbu (5.1) slijedi

$$\rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left(F\varphi_f - D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_f \right)^{nb} + S_C \Delta V \quad (5.10)$$

gdje $\sum_{nb=1}^{N_{nb}}$ označuje sumu normalne komponente vektora toka J_n po svim N_{nb} stranicama konačnog volumena.

5.2. Numeričke sheme za prostornu diskretizaciju

U ovome poglavlju će se dati uvid u numeričke sheme koje su korištene za diskretizaciju konvekcijskog i difuzijskog toka. Sheme za difuzijski transport se modeliraju kao da nema konvekcijskog transporta, dok se konvekcijski član modelira kao da nema difuzijskog člana [1].

5.2.1. Shema centralnih razlika (Central Differencing Scheme – CDS)

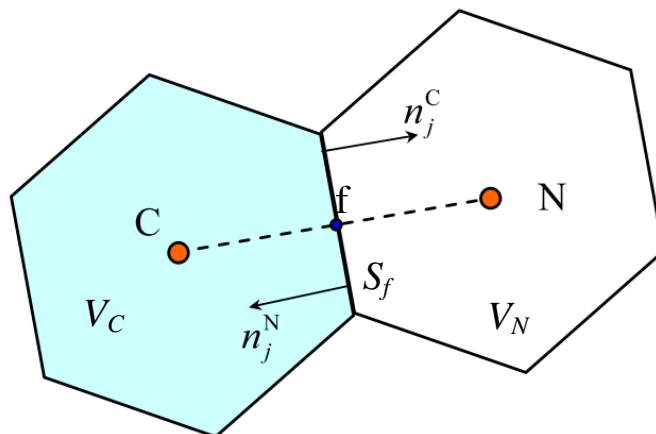
Ova shema diferencije se koristi za modeliranje vektora difuzijskog toka $-D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_f$, gdje je

$D = \frac{\Gamma_\varphi S_f}{\Delta n}$. Kod osnovne metode konačnih volumena ona je

$$-D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_f = -D(\varphi_N - \varphi_C) \quad (5.11)$$

Difuzija, za razliku od konvekcije, se širi u svim smjerovima. To znači da će na vrijednost vektora difuzijskog toka na stranici konačnog volumena utjecati vrijednosti iz čvorova konačnih volumena koji međusobno dijele tu stranicu. Iz jednačbe (5.11) se vidi da je ta važna činjenica uzeta u obzir. Shema centralnih razlika je višeg reda točnosti [1] i smatra se najboljom numeričkom shemom za difuzijski član.

5.2.2. Uzvodna shema (Upwind Differencing Scheme – UDS)



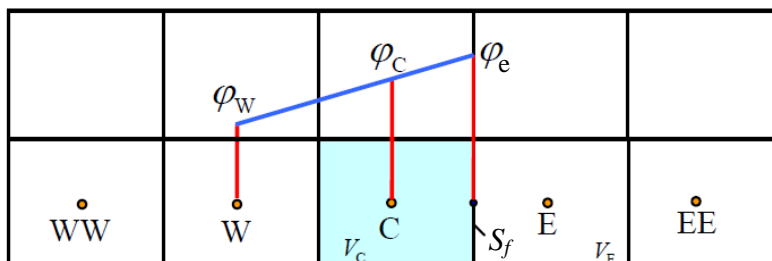
Slika 5.2 Konačni volumeni koji dijele zajedničku stranicu

Jednadžbom (5.9) se definirao vektor toka na sljedeći način $J_n = F\varphi_f - D\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{n}}\bigg|_f$. Shemom centralnih razlika se diskretizirao gradijent fizikalnog svojstva φ na stranici konačnog volumena. Uzvodnom shemom će se modelirati fizikalne vrijednost φ_f konvektivnog člana $F\varphi_f$ na granici dvaju volumena. Uzvodna shema nam ukazuje na to da se za vrijednost φ_f uzima vrijednost u uzvodnom čvoru. Hoće li uzvodni čvor biti φ_C ili φ_N ovisi o smjeru strujanja.

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_C & \text{za } F > 0 \\ \varphi_N & \text{za } F < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Uzvodna shema je prvog reda točnosti te unosi lažnu difuziju u numeričko rješenje [1]. Međutim, ova shema omogućuje jednostavno računanje koeficijenata koji su uvijek pozitivni. Time će se izbjeći nefizikalna oscilatorna rješenja kao i problemi oko konvergencije numeričkog postupka [1]. Zbog nižeg reda točnosti, ova će se shema koristiti dok se strujanje ne počne ustaljivati u svojoj 'orbiti', nakon čega se prelazi na sheme višeg reda točnosti (LUDES shema, limited linear shema).

5.2.3. Linearno uzvodna shema (Second Order Upwind ili Linear Upwind Scheme – LUDS)



Slika 5.3 Uz definiciju LUDS sheme

Linearna uzvodna shema je višeg reda točnosti. Fizikalna vrijednost φ_f konvektivnog člana $F\varphi_f$ na stranici S_f se može odrediti linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih čvorova, kao što je i prikazano na Slici 5.3 za slučaj da je $F > 0$ [1]

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_C^{\text{uzvodno}} = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_W) & \text{za } F > 0 \\ \varphi_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_E^{\text{uzvodno}} = \varphi_E + \frac{1}{2} (\varphi_E - \varphi_{EE}) & \text{za } F < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

gdje je $\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}$ dodatak za viši red točnosti. LUDS shema neće unositi numeričku difuziju u rješenje jer je višeg reda točnosti. Međutim, ona generira negativne koeficijente što znači da će rješenje u blizini diskontinuiteta biti oscilatorno [1]. Stoga se kaže da je ova numerička shema neomeđena.

Osim linearno uzvode sheme će se koristiti i limited linear numerička shema za diskretizaciju konvektivnog člana. Limited linear shema je numerička shema isto višeg reda točnosti.

5.3. Numeričke sheme za vremensku diskretizaciju

Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno i za stacionarne rubne uvjete. Fluktuacije svih fizikalnih veličina u strujanju izazivaju nestacionarnost. Turbulentno strujanje oko automobila ili zrakoplova se može analizirati kao stacionarno strujanje tako da se izostavi član lokalne promjene iz diskretiziranih jednadžbi količine gibanja.

Pošto će se strujanje u ovome završnom radu tretirati kao tranzijentno, morati će se koristiti numeričke sheme za vremensku diskretizaciju člana lokalne promjene.

Osnovne numeričke sheme vremenske diskretizacije su eksplicitne i implicitne sheme. Eksplicitna shema je jednostavnija te zauzima manje računalne memorije [1]. Međutim, vremenski korak ove sheme je ograničen na $\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\Gamma}$ jer će ona u protivnom postati nestabilna [2][6]. S druge strane, implicitne sheme su bezuvjetno stabilne te su time povoljnije za korištenje kao sredstvo za vremensku diskretizaciju lokalnog člana [2]. U ovome završnom radu će se koristiti samo implicitna shema prvog reda točnosti.

5.3.1. Implicitna shema prvog reda točnosti (Euler)

Implicitna shema prvog reda točnosti je

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_c^n = \frac{\phi_c^n - \phi_c^{n-1}}{\Delta t} \quad (5.14)$$

gdje je ϕ_c^n vrijednost fizikalnog polja iz sadašnjeg vremenskog trenutka (nepoznanica), a ϕ_c^{n-1} vrijednost iz prošlog vremenskog trenutka (poznato).

5.4. Osnovna svojstva numeričkih shema

Numeričke sheme korištene za diskretizaciju konveksijskog i difuzijskog člana u transportnoj jednađbi (5.1) moraju zadovoljavati određene uvjete ukoliko se želi dobiti fizikalno realna rješenja.

Najvažnija svojstva koje numeričke sheme moraju zadovoljavati su [2]

1. Konzervativnost
2. Konvergencija
3. Transportivnost

5.4.1. Konzervativnost

Konzervativnost numeričkih shema je osigurana tako da se protok fizikalnog svojstva kroz stranicu konačnog volumena jednako definira u oba volumena koja dijele tu stranicu [2]. To znači da je vektor toka koji izlazi iz jednog konačnog volumena upravo jednak onome vektoru toka koji ulazi u drugi (susjedni) konačni volumen.

5.4.2. Konvergencija

Dovoljni, ali ne i nužni uvjeti za konvergenciju i omeđenost numeričkog proračuna su sljedeći [5]

- a) Koeficijenti a_N^{nb} u diskretiziranim jednađbama moraju biti istog predznaka (obično pozitivnog). Ti koeficijenti predstavljaju utjecaj okolnih čvornih vrijednosti polja φ na vrijednost polja u čvoru C. Fizikalno značenje ovog uvjeta jest da će u slučaju porasta vrijednosti polja φ u okolnim čvorovima porasti i vrijednost istog fizikalnog svojstva u čvoru C. Ovaj uvjet osigurava omeđenost numeričke sheme.
- b) Izvorski član se linearizira u obliku $S_C \Delta V = a + g \varphi_C$ [5]. Vrijednost g mora biti negativna. To ima za posljedicu povećanje koeficijenta a_C , te pridonosi dijagonalnoj dominantnosti matrice sustava diskretiziranih jednađbi. To je izuzetno povoljno sa stajališta iterativnog rješavanja sustava algebarskih jednađbi.

- c) Dovoljan, ali ne i nužan uvjet za konvergencije jednom od iterativnih metoda je Scarborough-ov kriterij:

$$\frac{\sum |a_N^{nb}|}{|a_C'|} \begin{cases} \leq 1 \text{ u svim čvorovima} \\ < 1 \text{ barem u jednom cvoru} \end{cases}$$

gdje je $a_C' = a_C - g$

Ukoliko je ovaj uvjet zadovoljen, dobiva se dijagonalno dominantna matrica. Njena dijagonalna dominantnost se povećava i zbog negativne vrijednosti koeficijent g .

Ukoliko su sva tri uvjeta zadovoljena, prikladna metoda za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi je Gauss – Seidel metoda.

5.4.3. *Transportivnost*

Numerička shema mora biti takva da prepoznaje utjecaj susjednih proračunskih čvorova na evaluacijsku točku f . Ona mora prepoznati smjer strujanja i omjer jačine konvekcije i difuzije. Shema koja prepoznaje utjecaj susjednih čvorova na evaluacijsku točku f ovisno o Pecletovu broju ima svojstvo transportivnosti.

Omjer konvekcije i difuzije je, kao što je već rečeno, definiran Pecletovim brojem $Pe = \frac{F}{D}$.

U slučaju da $Pe \rightarrow 0$, strujanje ima čisti difuzijski karakter. To znači da će na vrijednost fizikalnog svojstva φ u evaluacijskoj točki f utjecati vrijednosti iz čvorova oba susjedna kontrolna volumena. Kada $Pe \rightarrow \infty$ strujanje je čisto konvektivnog karaktera, što znači da će utjecaj na vrijednost fizikalnog svojstva u točki f imati samo uzvodni čvor.

Numerička shema koja nema svojstvo transportivnosti je shema centralnih razlika (CDS) [2]. Ako se konvekcijski tok diskretizira linearnom interpolacijom (Central Differencing Scheme - CDS), za strujanje u pozitivnom smjeru x -osi, rezultati će imati fizikalno rješenje samo za $Pe < 2$. Razlog leži u tome što shema centralnih razlika pretpostavlja utjecaj oba susjedna proračunska čvora na evaluacijsku točku f . Kada je $Pe < 2$, ova shema je monotona te daje

točnije rezultate jer je tada jačina difuzije dominantna u odnosu na jačinu konvekcije. Međutim kada je $Pe > 2$, konvekcija postaje dominantna pa će utjecaj na vrijednost fizikalnog svojstva u evaluacijskoj točki dolaziti samo iz uzvodnog susjednog čvorova. U realnim proračunima konačni volumeni diskretiziranog prostora nikada nisu toliko mali da vrijedi $Pe < 2$, jer bi takav proračun bio pre skup s računalnog stajališta. Stoga se linearna aproksimacija (CDS) neće koristiti za aproksimaciju vrijednosti fizikalnih veličina u evaluacijskim točkama. Valja napomenuti da je shema centralnih razlika najbolje rješenje za diskretizaciju difuzijskog člana, upravo zato što uzima u obzir utjecaj oba susjedna proračunska čvora na evaluacijsku točku f.

Na primjer, uzvodna shema (Upwind Differencing Scheme – UDS) ima svojstvo transportivnosti za sve vrijednosti Pe . Stoga će se ova shema koristiti kao jedna od shema za diskretizaciju konvektivnog člana.

5.5. Rekapitulacija metode konačnih volumena

Za numeričke sheme objašnjene u poglavlju 5.2 i 5.3, koje se koriste u osnovnoj metodi konačnih volumena, vrijedi da je $\varphi_f = \varphi_f(\varphi_C, \varphi_N)$ i $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right|_f = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right|_f(\varphi_C, \varphi_N)$. Stoga se vektor toka J_n za svaku stranicu konačnog volumena može prikazati na sljedeći način

$$J_n = F\varphi_f - D \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right|_f = F\varphi_C + a_N(\varphi_C - \varphi_N) \quad (5.15)$$

gdje koeficijent a_N ovisi o primijenjenog numeričkoj shemi.

Uvrštavanjem (5.15) u (5.10) dobije se za svaki kontrolni volumen sljedeća jednačica

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = -\varphi_C \sum_{nb=1}^{N_{nb}} a_N^{nb} + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + S_C \Delta V \quad (5.16)$$

Jednačica (5.16) je opći oblik diskretizirane integralne transportne jednačice (5.1). Član lokalne promjene $\frac{d\varphi_C}{dt}$ se može diskretizirati pomoću eksplicitne ili implicitne metode. Za

vremensku diskretizaciju se najčešće koristi implicitna metoda jer je ona bezuvjetno stabilna tj. nema ograničenja vremenskog koraka. U slučaju diskretizacije eksplicitnom metodom izvorski član ostaje takav kakav i je. Kada se primjenjuje implicitna metoda izvorski član se obično linearizira u obliku $S_c \Delta V = a + g\varphi_c$ [5]. Da bi sve veličine u jednadžbi (5.16) bile definirane potrebno je član lokalne promjene, te konvektivni i difuzijski član u jednadžbi (5.10) diskretizirati pomoću prethodno navedenih shema. Tada se dobije sustav linearnih jednadžbi koji se iterativnim putem rješava za traženo polje φ . Naravno da se mogu koristiti i ostale raspoložive numeričke sheme koje nisu opisane u ovome završnom radu.

5.5.1. Opći postupak numeričkog proračuna pomoću osnovne metode konačnih volumena

1. Područje strujanja se podijeli na određeni broj konačnih volumena. Svaki volumen diskretiziranog područja proračuna ima svoj proračunski čvor u kojem će se računati potrebne fizikalne veličine φ (Slika 5.1).
2. Integralna transportna jednadžba (5.1) svede se na opći diskretizirani oblik (vidi jednadžbu 5.16), koja se kao takva računa za svaki konačni volumen diskretiziranog područja.
3. Koeficijenti u diskretiziranoj jednadžbi (5.16) računaju se pomoću numeričkih shema. Vremenska diskretizacija provodi se u općem slučaju eksplicitnom ili implicitnom metodom.
4. Ovisno o problemu za Γ_φ i φ se bira odgovarajuća fizikalna veličina. Izvorski član se opisuje odgovarajućim relacijama.
5. Provođenjem postupka (1) – (4) dobije se sustav jednadžbi koji se rješava za traženo fizikalno svojstvo φ .

Ovisno o problemu, izvorski član, član lokalne promjene pa i konvekcijski član može izostati iz transportne jednadžbe (5.1). Primjer takvog problema je stacionarno provođenje topline kroz krutinu.

6. METODE RJEŠAVANJA NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI

Integralni oblik opće transportne jednačbe je

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = - \oint_{\Sigma S_f} (\rho v_j n_j \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j) dS_f + \int_V S_\phi dV \quad (6.1)$$

Ako je $\phi = v_i$, $S_\phi = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$, i $\Gamma_\phi = \mu$ jednačba (6.1) prelazi u sljedeći oblik

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \oint_{\Sigma S_f} (\rho v_j n_j v_i - \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j) dS_f - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \quad (6.2)$$

Jednačba (6.2) je integralni oblik jednačbe količine gibanja. Utjecaj gravitacijskog polja je izostavljen jer taj član ne pravi nikakve numeričke probleme [1] i ne utječe na strujanje promatranog problema. Dvodimenzijско nestlačivo strujanje, kakvo će se razmatrati u ovome završnom radu, opisano je jednačbom količine gibanja (6.2) i jednačbom kontinuiteta za nestlačivo strujanje koja glasi

$$\int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = \oint_{\Sigma S_f} v_j n_j dS_f = 0 \quad (6.3)$$

Jednačbe (6.2) i (6.3) sadže tri nepoznata skalarna polja: v_1, v_2 i p . Konveksijski član u jednačbi količine gibanja je nelinearan jer je jačina konvekcije, koja definira koeficijente u diskretiziranoj jednačbi, funkcija brzine koju se tek trebaju naći [1]. Upravo zbog navedenog razloga će numerički postupak nužno imati iterativni karakter. Nelinearna jednačba količine gibanja se linearizira u obliku [1]

$$\rho v_j v_i = \rho v_j^{n-1} v_i \quad (6.4)$$

gdje je v_j^{n-1} polje brzine dobiveno iz prethodne vanjske iteracije. Na početku iterativnog postupka brzina v_j^{n-1} je pretpostavljeno polje brzine.

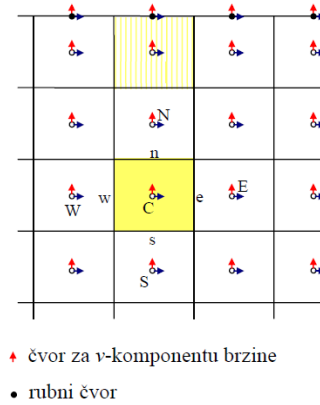
6.1. Jednadžba za tlak

U postupku iterativnog rješavanja jednadžbi količine gibanja kreće se tako da se pretpostavi polje brzine v_j^{n-1} i polje tlaka. Rješavanjem jednadžbi količine gibanja dobije se novo polje brzine v_i . Međutim, to polje brzine neće zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta. Stoga nema smisla ići u novi iterativni korak sa tim vrijednostima. Uzimajući rečeno u obzir, kako bi se osiguralo soleidnost novog polja brzine v_i prvo se rješava jednadžba za tlak pomoću koje se izračuna nova vrijednost tlaka. Sa tim tlakom se korigira polje brzine. Tada se dobije novo polje brzine kojoj odgovara polje tlaka [6]. S tim veličina se kreće dalje u novi iterativni postupak. Jednadžba za tlak se može dobiti numeričkog divergencijom jednadžbe količine gibanja (6.2)

$$\int_{\Sigma S_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS_f = - \oint_{\Sigma S_f} (\rho v_j v_i n_i) dS_f \quad (6.5)$$

6.2. Nepomaknuta mreža

Kod nepomaknute mreže su polje brzine v i polje tlaka p definirane u proračunskim čvorovima kontrolnih volumena, kao što je prikazano na *Slici 6.1* [1].



Slika 6.1 Nepomaknuta mreža

Diskretizirana jednačba količine gibanja na nepomaknutoj mreži glasi

$$a_C u_C = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} - (p_e - p_w) A_C^u + b_C^u \quad (6.6)$$

$$a_C v_C = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} - (p_n - p_s) A_C^v + b_C^v \quad (6.7)$$

gdje su A_C^u i A_C^v površine stranica konačnog volumena koje imaju normale u smjeru pripadajućih komponenti brzine. Članovi b_C^u i b_C^v sadrže informacije o rubnim uvjetima i vrijednosti polja brzine u prethodnom vremenskom trenutku (ako se promatra nestacionarno strujanje – a na početku numeričkog proračuna je to pretpostavljeno polje brzine).

Diskretizirani oblik jednačbe kontinuiteta je

$$(\rho u A)_e + (\rho v A)_n - (\rho u A)_w - (\rho v A)_s = 0 \quad (6.8)$$

gdje su brzine definirane na stranicama konačnog volumena.

6.2.1. Problemi nepomaknute mreže

Tlakovi u diskretiziranim jednadžbama količine gibanja (6.6) i (6.7) se pojavljuju na stranicama konačnog volumena. Linearnom interpolacijom se tlakovi mogu izraziti preko poznatih proračunskih čvorova kontrolnog volumena, pa tako i njihova razlika [2]. Stoga vrijedi da je

$$(p_e - p_w) = \frac{p_E + p_C}{2} - \frac{p_C + p_W}{2} = \frac{p_E - p_W}{2} \quad (6.9)$$

$$(p_n - p_s) = \frac{p_N + p_C}{2} - \frac{p_C + p_S}{2} = \frac{p_N - p_S}{2} \quad (6.10)$$

Ako je raspodjela tlakova na mreži "cik-cak" tipa kao što je prikazano na slici 6.2 [1]

	100	0	100	0
	0	100 N	0	100
	100 W	0 C	100 E	0
	0	100 S	0	100

Slika 6.2 "cik-cak" raspodjela tlaka

razlike tlakova u jednadžbi količine gibanja će biti jednake nuli što znači da će se "cik-cak" raspodjela tlaka u jednadžbama količine gibanja ponašati kao uniformna [1][2]. Tada se brzine na stranicama konačnog volumena neće moći odrediti linearnom interpolacijom jer će numerički proračun postati oscilatoran [2].

6.2.2. Rhie i Chow interpolacija

Da bi se izbjegla pojava cik-cak raspodjele tlaka, potrebno je derivaciju tlaka diskretizirati vrijednostima u susjednim čvorovima [1]. Temeljem te činjenice Rhie i Chow su predložili interpolaciju brzine na stranici konačnog volumena u kojoj se koristi derivacija tlaka diskretizirana razlikom tlaka u dva susjedna čvora [1]

$$u_e = \bar{\hat{u}}_e - \left(\frac{A_e}{a_e} \right) (p_E - p_C) \quad (6.11)$$

gdje su

$\bar{\hat{u}}_e$ – brzina na stranici e dobivena linearnom interpolacijom pseudo brzina (koji ne zavise o tlaku) iz čvorova C i E

$\left(\frac{A_e}{a_e} \right)$ – koeficijenti na stranici e dobiveni linearnom interpolacijom koeficijenata definiranim u čvorovima C i E.

Analogno se definiraju brzine na ostalim granicama konačnog volumena.

6.3. Povezivanje polje brzine i tlaka

Rješavanjem diskretiziranih jednadžbi količine gibanja (s koeficijentima izračunatim s vrijednostima brzine iz prethodne vanjske iteracije), novo polje brzine neće zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta (jer pretpostavljeno polje tlaka nije točno) [6]. Jednadžba kontinuiteta mora biti zadovoljena u svakom trenutku i za svaki konačni volumen [1]. Stoga se nakon rješavanja jednadžbi količine gibanja vrši korekcija brzine u^* i v^* s ciljem zadovoljavanja jednadžbe kontinuiteta. Korekcija polja brzine je povezana s korekcijom tlaka, pa će se korekcije brzine izraziti kao funkcija korekcije tlaka [1].

Novo korigirano polje brzine u i v se može izraziti sljedećim jednažbama

$$u = u^* + u' \quad (6.12)$$

$$v = v^* + v' \quad (6.13)$$

gdje su brzine definirane na granicama konačnog volumena. u^* i v^* su trenutne brzine koje ne zadovoljavaju jednažbu kontinuiteta. u' i v' su korigirane vrijednosti brzine pomoću kojih se dobije novo polje brzine koje zadovoljava jednažbu kontinuiteta.

Jednažba za korekciju tlaka, kojom se povezuje korekcija brzine i tlaka, se može izvesti iz jednažbe kontinuiteta. Prema jednažbi (6.8) jednažba kontinuiteta je

$$(\rho u A)_e + (\rho v A)_n - (\rho u A)_w - (\rho v A)_s = 0 \quad (6.14)$$

Ako se umjesto polja brzine u i v uvrste relacije dane u jednažbama (6.12) u (6.13) dobiva se

$$[\rho(u^* + u')A]_e + [\rho(v^* + v')A]_n - [\rho(u^* + u')A]_w - [\rho(v^* + v')A]_s = 0 \quad (6.15)$$

Izraz za vezu između korekcije brzine i korekcije tlaka [1] je

$$u'_e = -\left(\frac{A_e}{a_e}\right)(p'_E - p'_C) \quad (6.16)$$

Analogno izrazu (6.15) može se prikazati veza između korekcije brzine i korekcije tlaka za brzine na ostalim granicama konačnog volumena. Uvrštavanjem izraza (6.15) u jednažbu kontinuiteta (6.14) slijedi jednažba za korekciju tlaka.

$$a_C p'_C = a_E p'_E + a_N p'_N + a_W p'_W + a_S p'_S = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b'_c \quad (6.17)$$

gdje su

$$a_E = \rho \left(\frac{\overline{A_e}}{a_e} \right) A_e, \quad a_N = \rho \left(\frac{\overline{A_n}}{a_n} \right) A_n, \quad a_W = \rho \left(\frac{\overline{A_w}}{a_w} \right) A_w, \quad a_S = \rho \left(\frac{\overline{A_s}}{a_s} \right) A_s \quad \text{i}$$

$$a_C = a_E + a_N + a_W + a_S = \sum_{nb} a_{nb} \quad \text{i}$$

$$b_c^{p'} = -(\rho u_e^* A_e + \rho v_n^* A_n - \rho u_w^* A_w - \rho v_s^* A_s)$$

Izraz $b_c^{p'}$ označuje odstupanje od jednađbe kontinuiteta i jednaka je nuli kada brzine zadovoljavaju jednađbu kontinuiteta. Brzine na stranicama su dobivene Rhie i Chow interpolacijom. Iz jednađbe (6.16) se izračuna korekcija tlaka koja se koristi za računanje korekcije brzine iz jednađbe (6.15). S dobivenim korekcijama brzine i tlaka se korigira polje brzine i tlaka. Tlak se korigira sljedećom jednađbom

$$p = p^* + p' \quad (6.17)$$

S tim novim vrijednostima se kreće u sljedeći iterativni korak.

6.4. SIMPLE Algoritam

SIMPLE [5] algoritam se koristi za rješavanje Navier – Stokesovih jednađbi. Ovaj algoritam se koristi za rješavanje problema strujanja stacionarnog tipa. Koraci SIMPLE algoritam su sljedeći

1. Prepostaviti polje tlaka p^* i polje brzine u^{n-1} i v^{n-1}
2. Riješiti jednađbe količine gibanja (6.6) i (6.7). Rješavanjem tih jednađbi se dobije novo polje brzine u^* i v^* .
3. Riješiti jednađbu za tlak (6.16).
4. Izračunati novo polje tlaka p iz jednađbe (6.17).
5. Korigirati novo polje brzine u i v iz jednađbi (6.12) i (6.13) do na solenoidnost.
6. Riješiti diskretizirane transportne jednađbe za ostale fizikalne veličine ϕ (npr. transportne jednađbe u modelima turbulencije).

7. Ponoviti korake 1 – 7 do konvergencije tj. kada korekcije tlaka i brzine ne postanu zanemarivo male. Sada će novo polje tlaka p biti p^* , a polje brzine će biti ono izračunato iz petog koraka.

Kada bih se u svakom iterativnom koraku koristilo polje tlaka i polje brzina koji su korigirani na način prikazan jednađbama (6.12), (6.13) i (6.17) numerički proračun bih divergirao. Ukoliko se želi osigurati konvergencija SIMPLE algoritma tlak i brzine moraju biti podrelaksirani. Stoga se polje brzine i tlaka s kojim se kreće u sljedeći iterativni korak računaju na sljedeći način

$$p^{novo} = p^* + \alpha_p p' \quad (6.18)$$

Iz jednađbe (6.18) se vidi da se tlak eksplicitno podrelaksira. Polje brzine u i v će se implicitno podrelaksirati na sljedeći način

$$\frac{a_c}{\alpha} u_c = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_c u_c^{n-1} - (p_e - p_w) A_c^u + b_c^u \quad (6.19)$$

$$\frac{a_c}{\alpha} v_c = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_c v_c^{n-1} - (p_n - p_s) A_c^v + b_c^v \quad (6.20)$$

Gdje su p^{novo} , u i v nove vrijednosti s kojima se kreće u sljedeći iterativni korak (1 – 7). u^{n-1} i v^{n-1} su vrijednosti iz prethodnog iterativnog koraka. α_p , α_u i α_v su relaksacijski faktori čije su vrijednosti između 0 i 1. Iz jednađbi (6.19) i (6.20) se vidi da sa podrelaksacijskim faktorima se povećava dijagonalna dominantnost matrice što pridonosi konvergenciji numeričkog proračuna.

6.5. PISO Algoritam

PISO [2][9] algoritam se također koristi za rješavanje Navier – Stokesovih jednadžbi. Ovaj algoritam se koristi za rješavanje problema nestacionarnog strujanja. Zbog toga što se razmatra nestacionarno strujanje, koeficijenti u discretiziranim jednadžbama količine gibanja (6.6) i (6.7) sadržavati će dodatan član koji je posljedica vremenske diskretizacije

1. Slobodni članovi u jednadžbama (6.6) i (6.7) b_c^u i b_c^v će sadržavati $\frac{\rho_c^{n-1} \Delta V}{\Delta t} u_c^{n-1}$ i

$$\frac{\rho_c^{n-1} \Delta V}{\Delta t} v_c^{n-1}$$

2. Centralni koeficijenti a_c u jednadžbama (6.6) i (6.7) član $\frac{\rho_c^{n-1} \Delta V}{\Delta t}$

U PISO algoritmu se jednadžba za tlak rješava dva puta. Stoga će i dosada korištene oznake biti drugačijeg oblika. PISO algoritam u svakom vremenskom trenutku se može objasniti na sljedeći način

1. Pretpostaviti polje tlaka p^* i polje brzine u^{n-1} i v^{n-1} u vremenskom trenutku t
2. Riješiti jednadžbe količine gibanja (6.6) i (6.7). Rješavanjem tih jednadžbi se dobije novo polje brzine u^* i v^* .
3. Riješiti prvi puta jednadžbu za tlak (6.16).
4. Izračunati novo polje tlaka p^{**} iz jednadžbe (6.17) (sada je $p = p^{**}$).
5. Izračunati novo polje brzine u^{**} i v^{**} iz jednadžbi (6.12) i (6.13) (sada je $u = u^{**}$ i $v = v^{**}$).
6. Riješiti drugi puta jednadžbu za tlak (6.16)
7. Izračunati novo polje tlaka p^{***} iz sljedeće jednadžbe $p^{***} = p^{**} + p''$.
8. Izračunati novo polje brzine u^{***} i v^{***} iz sljedećih jednadžbi $u^{***} = u^{**} + u''$ i $v^{***} = v^{**} + v''$.
9. Riješiti diskretizirane transportne jednadžbe za ostale fizikalne veličine ϕ (npr. Transportne jednadžbe u modelima turbulencije).

U PISO algoritmu nije potrebno podrelaksirati polje brzine i tlaka [6].

7. NUMERIČKI PRORAČUN

7.1. Simulacija strujanja oko cilindra ($Re = 1 \cdot 10^5$)

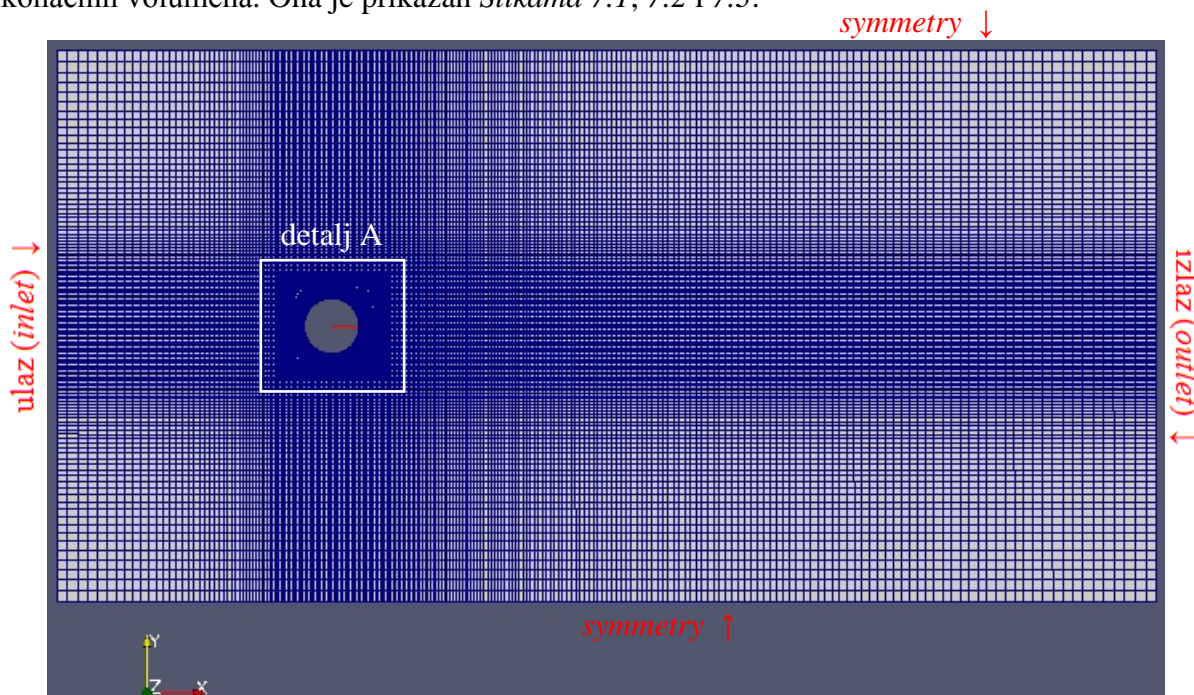
Numerička simulacija strujanja oko cilindra je izvršena za $Re = 1 \cdot 10^5$. Modeli turbulencije koji su se koristili su $k\text{-}\epsilon$ i $k\text{-}\omega$ SST. Prostorne numeričke sheme korištene u ovoj numeričkoj simulaciji su

1. limitedLinear – za konvektivne članove
2. Shema centralnih razlika (CDS) – za difuzijske članove

Za vremensku diskretizacije se koristila implicitna shema prvog reda točnosti (Euler). Algoritam korišten za numerički proračun nestacionarnog strujanja oko cilindra je PIMPLE [16].

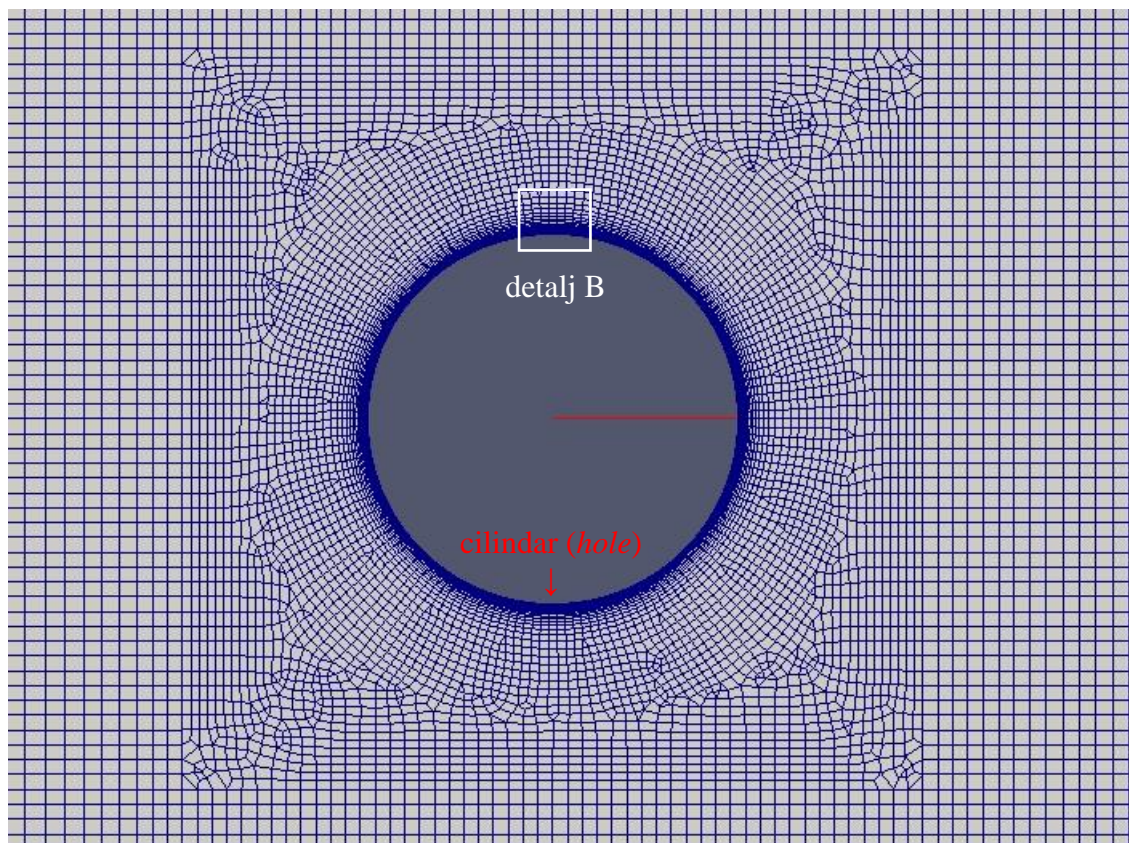
7.1.1. Diskretizacija područja proračuna

Diskretizacija područja proračuna je izrađena u programu *Salome* i sastoji se od 36781 konačnih volumena. Ona je prikazan Slikama 7.1, 7.2 i 7.3.



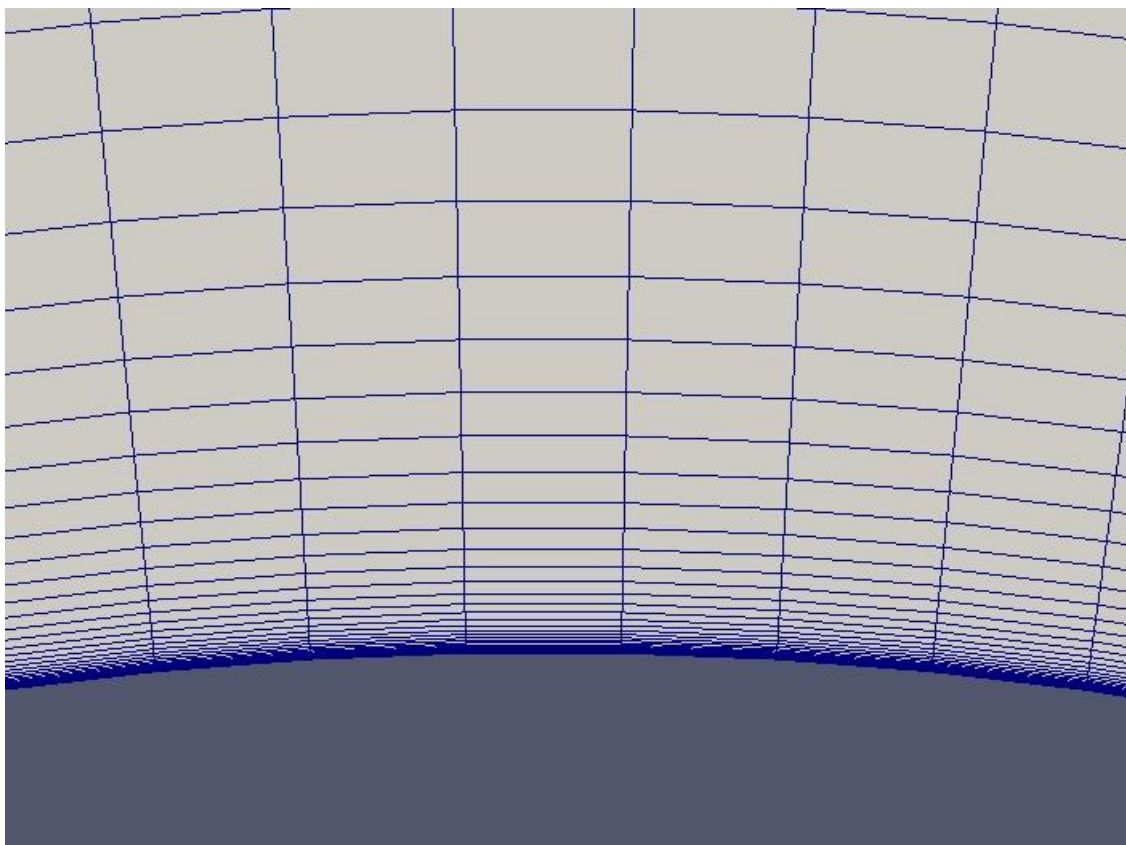
Slika 7.1 Diskretizacija područja proračuna oko cilindra

Slika 7.1 prikazuje cjelokupno diskretizirano područje proračuna. Geometrijska mreža je finija u području strujanja iza cilindra kako bih se uhvatili *Von Karmanovi* vrtlozi i polje tlaka. Mreža je još finija u području oko cilindra kao što je prikazano na Slici 7.2.



Slika 7.2 Diskretizacija područja proračuna oko cilindra – detalj A

Slika 7.2 pokazuje geometrijsku mrežu u blizini cilindra. Na ovom području je diskretizacija područja finija nego u dijelovima područja proračuna daleko od cilindra (osim u vrtložnom tragu) zbog toga što su promjene fizikalnih veličina φ značajnije. Proračunska mreža je najfinija u graničnom sloju (detalj B) jer su u tom području strujanja promjene fizikalnih veličina φ najveće.



Slika 7.3 Diskretizacija područja proračuna oko cilindra – detalj B

Slika 7.3 prikazuje geometrijsku mrežu uz rub cilindra. $k\text{-}kl\text{-}\omega$ i $k\text{-}\omega$ SST modeli turbulencije su *low- Re* modeli turbulencije koji modeliraju strujanje sve do viskoznog podsloja. Stoga će y^+ u prvom konačnom volumenu morati biti manji od jedan [4][7]. Za zadane veličine fizikalnih svojstva φ će y^+ ovisiti o visini prve ćelije (konačni volumen). Da bi y^+ u prvim ćelijama uz rub cilindra bio manji od jedan, visina prvih ćelija će morati biti manja od 0,0002 m [18]. U ovome završnom radu, za strujanje oko cilindra, visina prve ćelije je 0,00005 m.

7.1.2. Rubni uvjeti

Rubni uvjeti za koje se zadaju fiksne veličine (*fixedValue*) fizikalnog svojstva φ se zovu Dirilechtovi rubni uvjeti [1]. Ukoliko se zadaje gradijent fizikalnog svojstva φ u smjeru normale, onda se govori o Neumannovom rubnom uvjetu [1].

7.1.2.1. Rubni uvjet za k - kl - ω model turbulencije

Tablica 7.1 Rubni uvjeti za k , kl , i ω (cilindar)

Rubni uvjeti za turbulentu kinetičku energiju k (k_t)	
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type fixedValue; value uniform 1.0171224e-5;
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type zeroGradient;
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type fixedValue; value uniform 1.0171224e-5;
Rubni uvjeti za laminarnu kinetičku energiju k_l	
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type fixedValue; value uniform 0;
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type zeroGradient;
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type fixedValue; value uniform 0;
Rubni uvjeti za vremensku skalu turbulencije ω	
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type fixedValue; value uniform 0.0031892356;
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type zeroGradient;
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type zeroGradient;

Tablica 7.2 Rubni uvjeti za v_t , U i p (cilindar)

Rubni uvjeti za turbulentu kinematičku viskoznost ν_t		
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type	calculated;
	value	uniform 0;
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type	calculated;
	value	uniform 0;
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type	nutLowReWallFunction;
	value	uniform 0;
Rubni uvjeti za brzinu U		
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type	freestream;
	freestreamValue	uniform (1.86 0 0);
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type	freestream;
	freestreamValue	uniform (1.86 0 0);
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type	fixedValue;
	value	uniform (0 0 0);
Rubni uvjeti za tlak p		
Na ulazu (<i>inlet</i>)	type	freestreamPressure;
Na uzlazu (<i>outlet</i>)	type	freestreamPressure;
Na površini cilindra (<i>hole</i>)	type	zeroGradient;

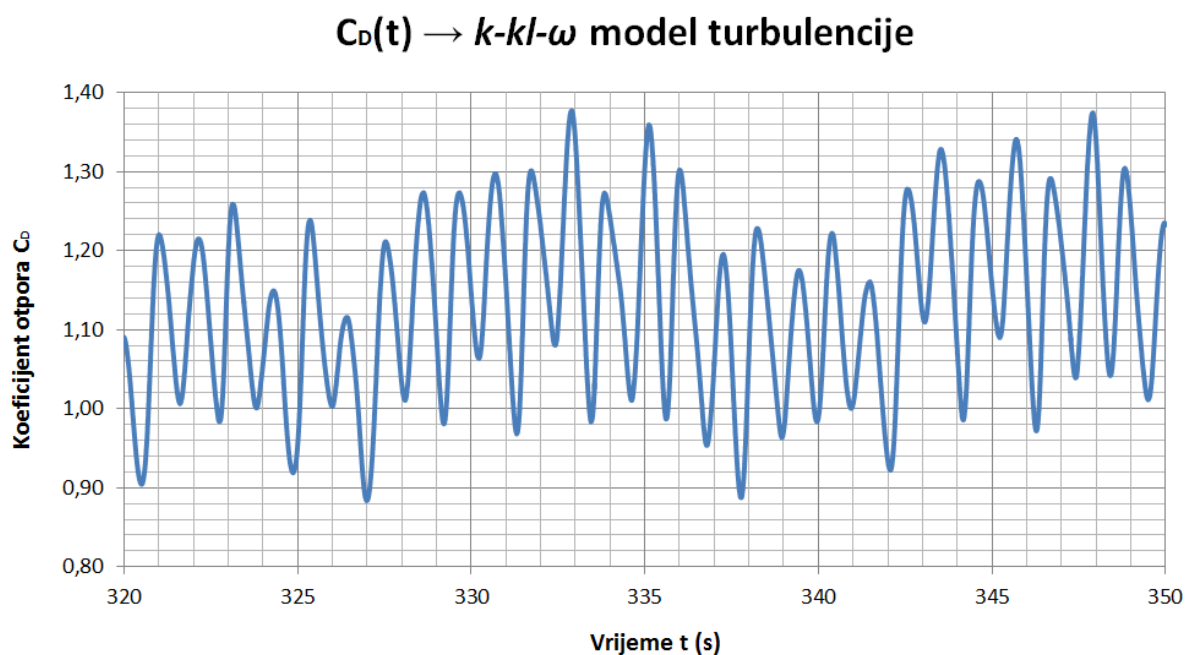
Freestream rubni uvjet u OpenFOAM-u je takav da gleda tok fluida kroz površine konačnih volumena na rubovima. Ako tok ulazi u konačni volumen rubni uvjet će biti *fixedValue*. Ako tok izlazi iz konačnog volumena rubni uvjet će biti *zeroGradient*.

7.1.2.2. Rubni uvjet za $k-\omega$ SST model turbulencije

Rubni uvjeti za $k-\omega$ SST model turbulencije su isti kao i za turbulentnu viskoznost ν_t , brzinu U , tlak p , turbulentu skalu duljine ω i turbulentnu kinetičku energiju k . Rubni uvjeti za laminarnu kinetičku energiju k_l se ne zadaju jer u ovome modelu turbulencije ne postoji transportna jednačba za laminarnu kinetičku energiju [2].

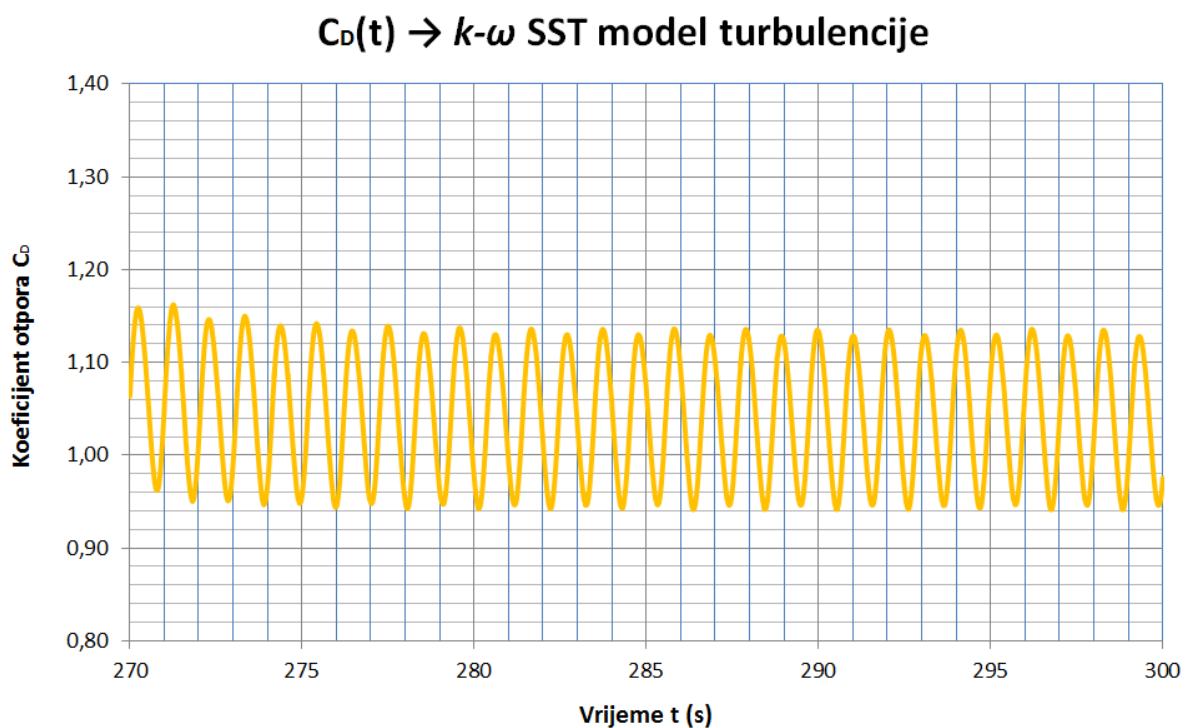
7.1.3. Rezultati numeričke simulacije i usporedba sa eksperimentalnim mjerenjima

Zbog okidanja Von Karmanovih vrtloga će koeficijent otpora C_D (a i koeficijent uzgona C_L) oscilirati. Na Slici 7.4 i 7.5 su prikazane promjene koeficijenta otpora u vremenu. U okviru ovog poglavlja će se sa eksperimentalnim mjerenjima uspoređivati samo integralna vremenski osrednjena veličina koeficijenta otpora $\overline{C_D}$ dobivena numeričkom simulacijom. Koeficijent uzgona se neće razmatrati jer će svi modeli turbulencije davati oscilatorna rješenja oko nultog koeficijenta uzgona pa će i osrednjeni koeficijent uzgona biti jednak nuli. Stoga su ti rezultati nisu interesanti pri uspoređivanju valjanosti pojedinog modela turbulencije.



Slika 7.4 Koeficijent otpora C_D dobiven pomoću $k-kl-\omega$ modela turbulencije

Osrednjeni koeficijent otpora $\overline{C_D}$ za $k-kl-\omega$ model turbulencije je 1,1306.



Slika 7.5 Koeficijent otpora C_D dobiven pomoću $k-\omega$ SST modela turbulencije

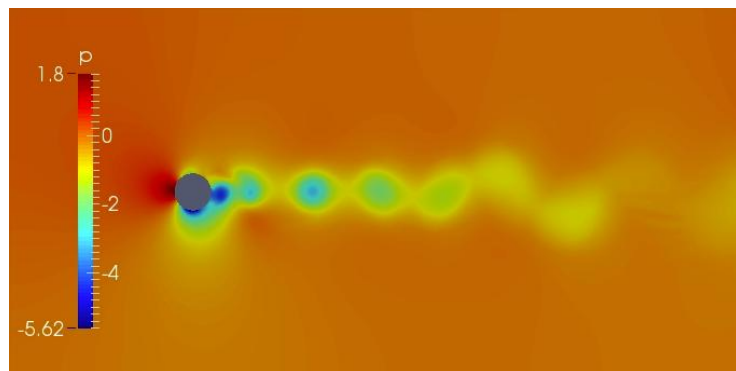
Osrednjeni koeficijent otpora $\overline{C_D}$ za $k-\omega$ SST model turbulencije je 1,0450.

U sljedećoj tablici su dani rezultati oba modela turbulencije te i rezultati eksperimentalnih mjerenja.

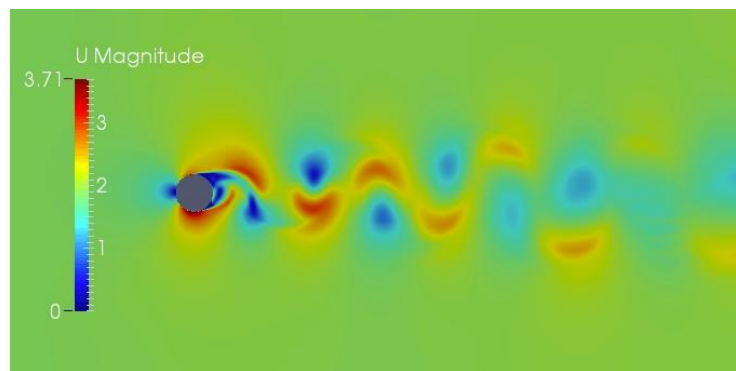
Tablica 7.3 Usporedba osrednjenog koeficijent otpora $\overline{C_D}$

$Re = 1 \cdot 10^5$	Koeficijent otpora $\overline{C_D}$
$k-kl-\omega$	1,13056
$k-\omega$ SST	1,04500
Eksperimentalna mjerenja [14]	1,2

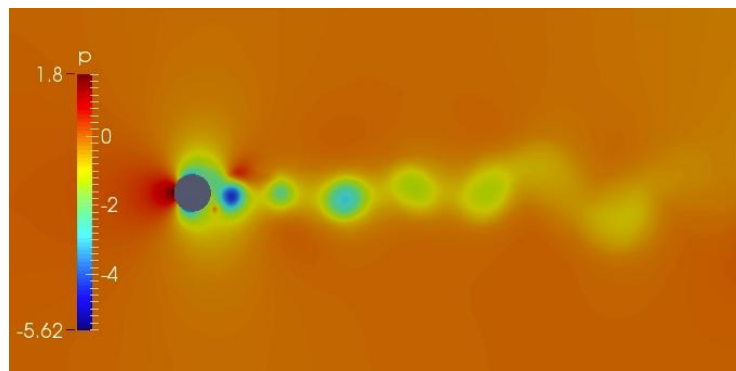
Na sljedećim slikama je prikazano polje brzine i tlaka pri maksimalnom i minimalnom koeficijentu otpora za $k-kl-\omega$ i $k-\omega$ SST modele turbulencije.



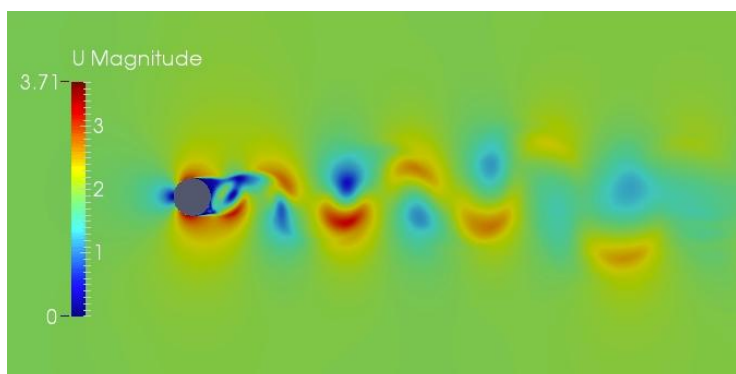
Slika 7.6 Polje tlaka p pri $C_{D, \max} = 1,377157$ i $t = 332,9$ s ($k\text{-}kl\text{-}\omega$)



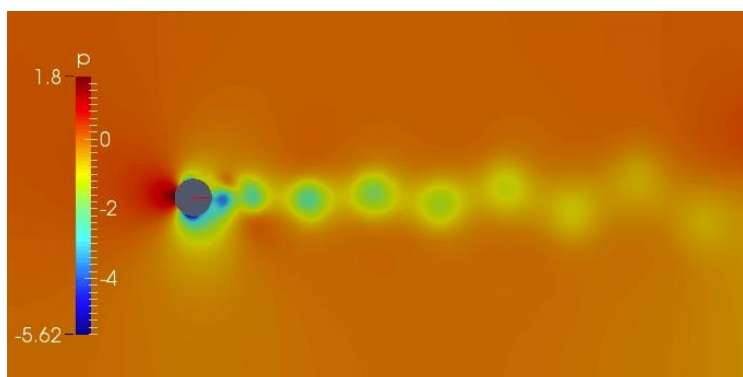
Slika 7.7 Polje brzine U pri $C_{D, \max} = 1,377157$ i $t = 332,9$ s ($k\text{-}kl\text{-}\omega$)



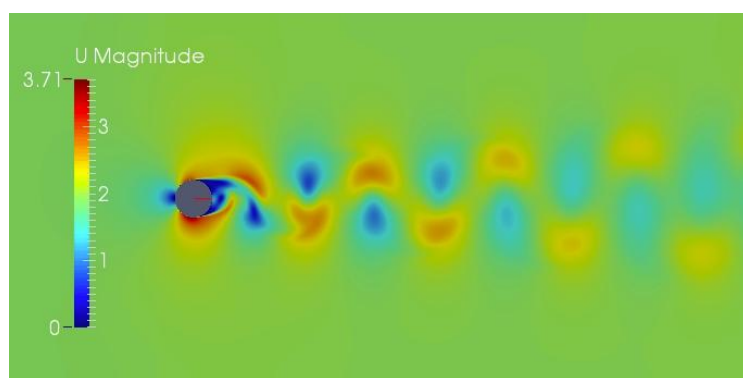
Slika 7.8 Polje tlaka p pri $C_{D, \min} = 0,835223$ i $t = 327$ s ($k\text{-}kl\text{-}\omega$)



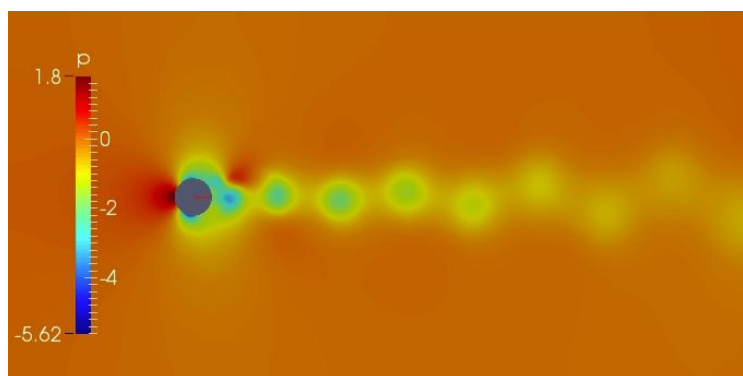
Slika 7.9 Polje brzine U pri $C_{D, \min} = 0,835223$ i $t = 327$ s ($k\text{-}kl\text{-}\omega$)



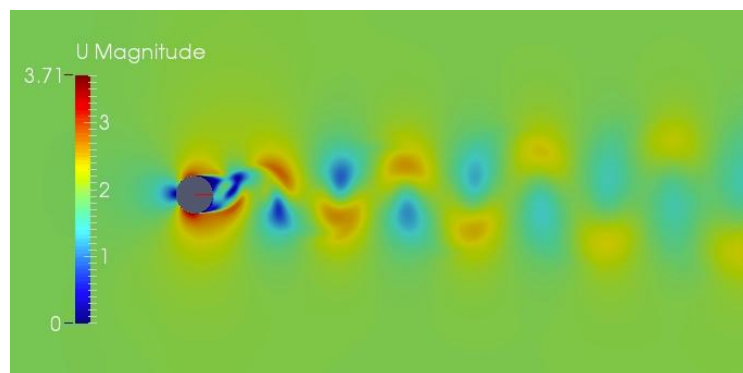
Slika 7.10 Polje tlaka p pri $C_{D,\max} = 1,159074$ i $t = 271,3$ s ($k-\omega$ SST)



Slika 7.11 Polje brzine U pri $C_{D,\max} = 1,159074$ i $t = 271,3$ s ($k-\omega$ SST)



Slika 7.12 Polje tlaka p pri $C_{D,\min} = 0,941626$ i $t = 288,4$ s ($k-\omega$ SST)



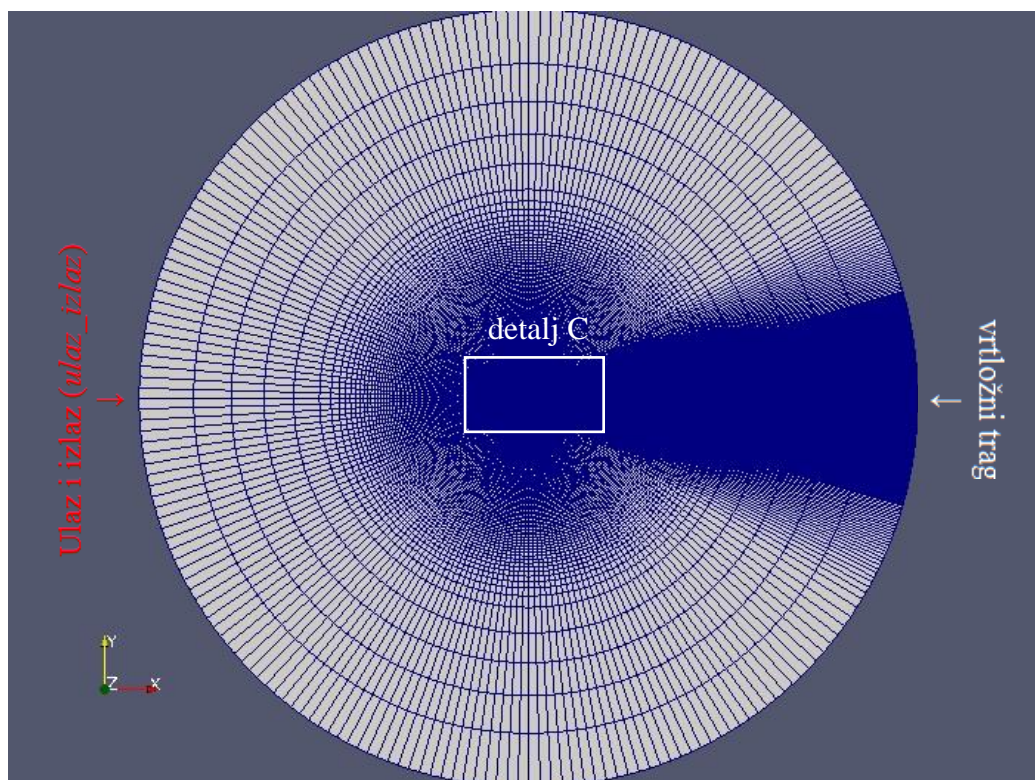
Slika 7.13 Polje brzine U pri $C_{D,\min} = 0,941626$ i $t = 288,4$ s ($k-\omega$ SST)

7.2. Simulacija strujanja oko aeroprofila NLF(1) – 0115 ($Re = 2 \cdot 10^5$)

Numerička simulacija strujanja oko aeroprofila NLF(1) - 0115 je izvršena za $Re = 2 \cdot 10^5$ pri napadnim kutevima 0° , 5° i 10° . Model turbulencije koji se koristio je $k\text{-}\kappa\text{-}\omega$. Na početku numeričke simulacije su svi konvektivni članovi prostorno diskretizirani pomoću numeričke sheme upwind tj. sheme prvog reda točnosti. Nakon što se strujanje počelo ustaljivati u svojoj 'orbiti' numeričke sheme za prostornu diskretizaciju su prebačene na sheme višeg reda točnosti. Za diskretizaciju konvektivnog člana brzine $\text{div}(\phi, U)$ se koristila linear upwind shema a za ostale konvektivne članove se koristila limited linear shema. S obzirom da su od interesa samo vremenski osrednjeni koeficijenti otpora $\overline{C_D}$ i uzgona $\overline{C_L}$, za vremensku diskretizaciju će se koristiti implicitna shema koja je prvog reda točnosti (Euler). Algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka, korišten za numerički proračun nestacionarnog nestačivog izotermnog strujanja oko NLF(1) – 0115 aeroprofila, je PIMPLE [16].

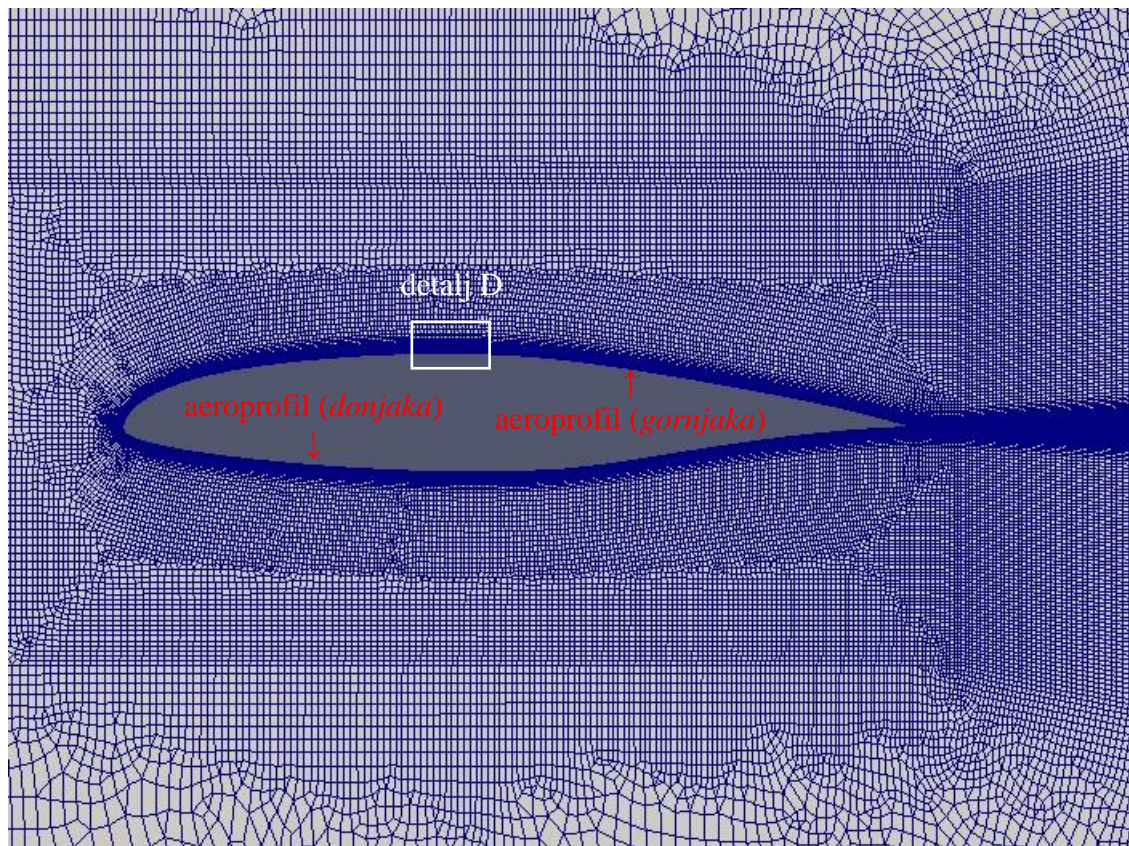
7.2.1. Diskretizacija područja proračuna

Diskretizacija područja proračuna je izrađena u programu *Salome* i sastoji se od 113308 konačnih volumena. Ona je prikazan *Slikama 7.14, 7.15 i 7.16*.



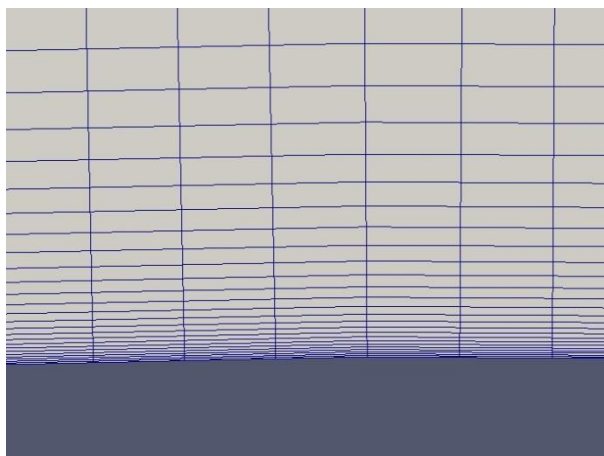
Slika 7.14 Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145)

Na *Slici 7.12* se vidi ukupno diskretizirano područje proračuna. Proračunska mreža je finija u blizini aeroprofila i u vrtložnom tragu kao što to pokazuje *Slika 7.15*.



Slika 7.15 Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145) – detalj C

Detalj D prikazan na *Slici 7.16* pokazuje dijelić graničnog sloja gdje je proračunska mreža najfinija. Da bi y^+ u prvim ćelijama uz rub aeroprofila bio manji od jedan, visina prvih ćelija će morati biti manji od 0,0001 m [17]. U ovome završnom radu, za strujanje oko aeroprofila, visina prve ćelije je 0,00005 m.



Slika 7.16 Diskretizacija područja proračuna (NLF(1) – 01145) – detalj D

7.2.2. Rubni uvjeti

Intenzitet turbulencije Tu_∞ na ulazu u proračunsku domenu se računa pomoću Mack-ove korelacije [20]

$$N_{crit} = -8,43 - 2,4 \ln(Tu_\infty) \quad (7.1)$$

Gdje je $N_{crit} = 9$ [24] i predstavlja kritičnu vrijednost koju varijabla N poprima kod tranzicije. N je amplifikacijski faktor [19]. Iz (4.20) se izračunala turbulentna kinetička energija k (k_T). Iz jednadžbe (4.21) se izračunala frekvencija turbulencije. Za turbulentnu skalu duljine λ_T se uzelo da je jednaka 1 metar.

Tablica 7.4 Rubni uvjeti za k , k_L , i ω (za aeroprofil NLF(1) – 0115)

Rubni uvjeti za turbulentu kinetičku energiju k (k_T)	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type inletOutlet; inletValue uniform 1.0171224e-5; value uniform 0;
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type fixedValue; value uniform 0;
Rubni uvjeti za laminarnu kinetičku energiju k_L	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type inletOutlet; inletValue uniform 0; value uniform 0;
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type fixedValue; value uniform 0;
Rubni uvjeti za turbulentu skalu duljine ω	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type inletOutlet; inletValue uniform 0.0031892356; value uniform 0;
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type zeroGradient

Tablica 7.5 Rubni uvjeti za v_t , U i p (za aeroprofil NLF(1) – 0115)

Rubni uvjeti za turbulentu kinematičku viskoznost v_t	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type freestream; value uniform 0;
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type nutLowReWallFunction; value uniform 0;
Rubni uvjeti za brzinu U	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type freestream; freestreamValue uniform (3.72 0 0);
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type fixedValue; value uniform (0 0 0);
Rubni uvjeti za tlak p	
Na ulazu i izlazu (<i>ulaz_izlaz</i>)	type freestreamPressure;
Na površini aeroprofila (<i>gornjaka</i> i <i>donjaka</i>)	type zeroGradient;

Za napadne kuteve 5° i 10° su svi rubni uvjeti, osim onih za brzinu U , isti. **Rubni uvjeti za brzinu U pri napadnom kutu 5°** su

1. Na ulazu i izlazu (*ulaz_izlaz*)

type freestream;
freestreamValue uniform (3.705844277 0.324219363 0);

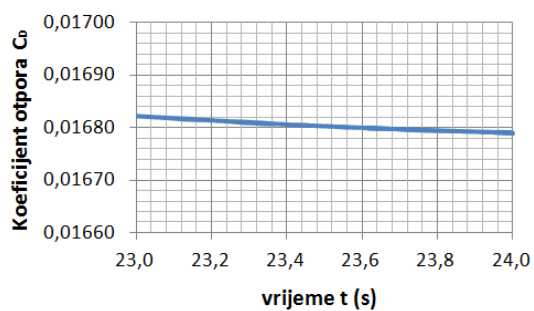
a pri **napadnom kutu 10°**

2. Na ulazu i izlazu (*ulaz_izlaz*)

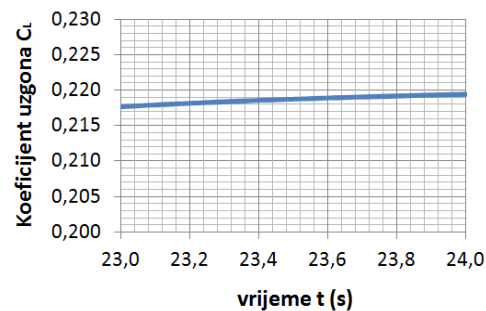
type freestream;
freestreamValue uniform (3.663484841 0.645971221 0);

7.2.3. Rezultati numeričke simulacije

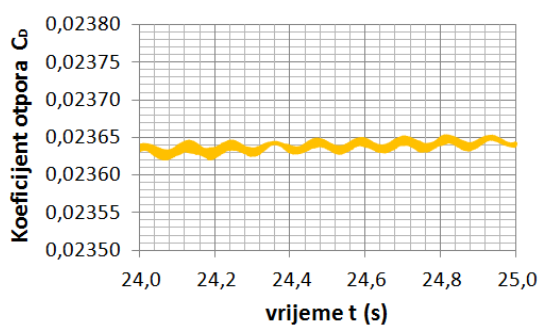
Na Slikama 7.17 – 7.22 su prikazani rezultati numeričkog proračuna kod kojih su kovektivni članovi diskretizirani pomoću numeričkih shema prvoga reda točnosti.



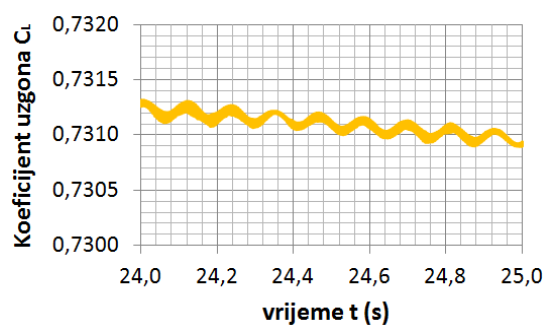
Slika 7.17 C_D pri $\alpha=0^\circ$ (prvi red točnosti)



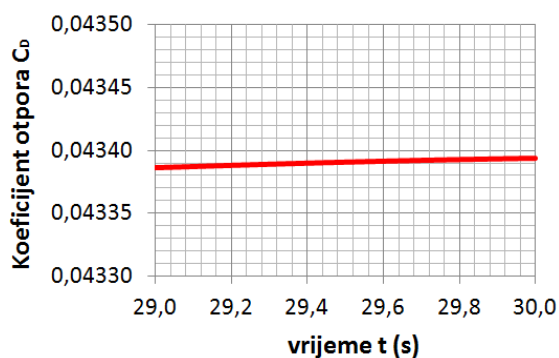
Slika 7.18 C_L pri $\alpha=0^\circ$ (prvi red točnosti)



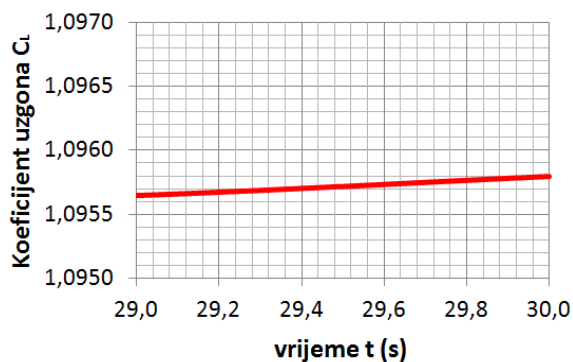
Slika 7.19 C_D pri $\alpha=5^\circ$ (prvi red točnosti)



Slika 7.20 C_L pri $\alpha=5^\circ$ (prvi red točnosti)

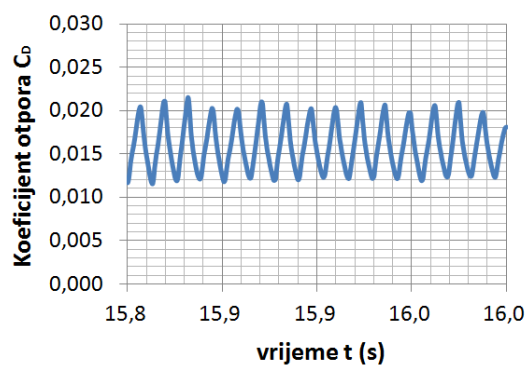


Slika 7.21 C_D pri $\alpha=10^\circ$ (prvi red točnosti)

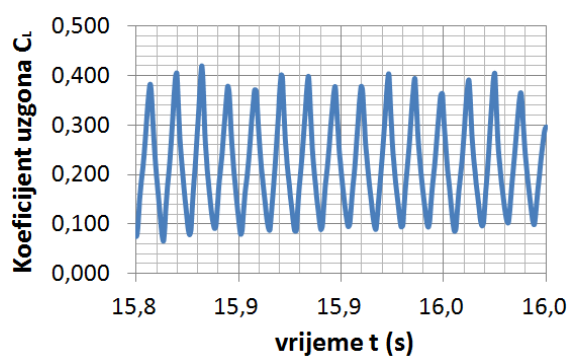


Slika 7.22 C_L pri $\alpha=10^\circ$ (prvi red točnosti)

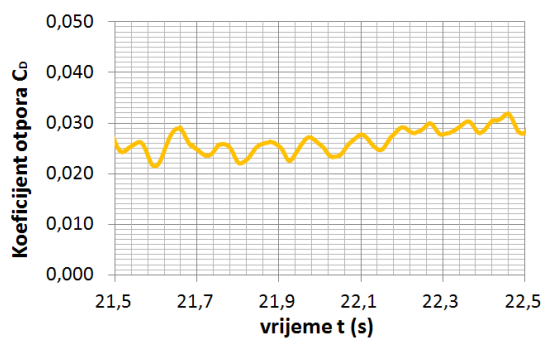
Rezultati prikazani Slikama 7.23 – 7.28 su rezultati numeričkog proračuna u kojem su svi konvektivni članovi bili diskretizirani numeričkom shemom višeg reda točnosti.



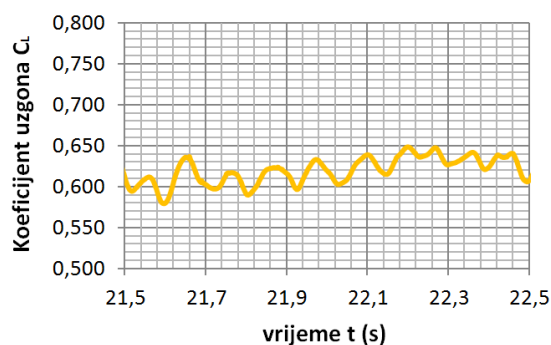
Slika 7.23 C_D pri $\alpha=0^\circ$ (viši red točnosti)



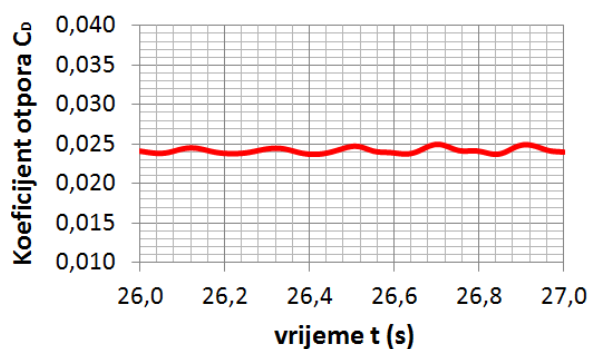
Slika 7.24 C_L pri $\alpha=0^\circ$ (viši red točnosti)



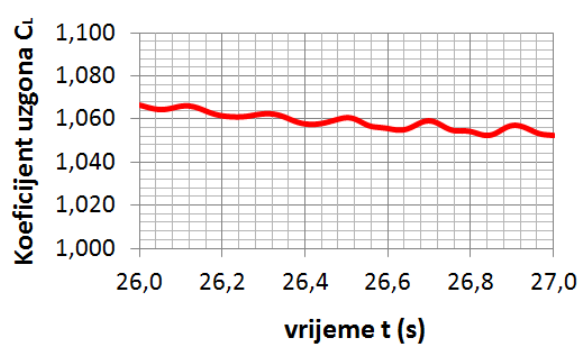
Slika 7.25 C_D pri $\alpha=5^\circ$ (viši red točnosti)



Slika 7.26 C_L pri $\alpha=5^\circ$ (viši red točnosti)



Slika 7.27 C_D pri $\alpha=10^\circ$ (viši red točnosti)



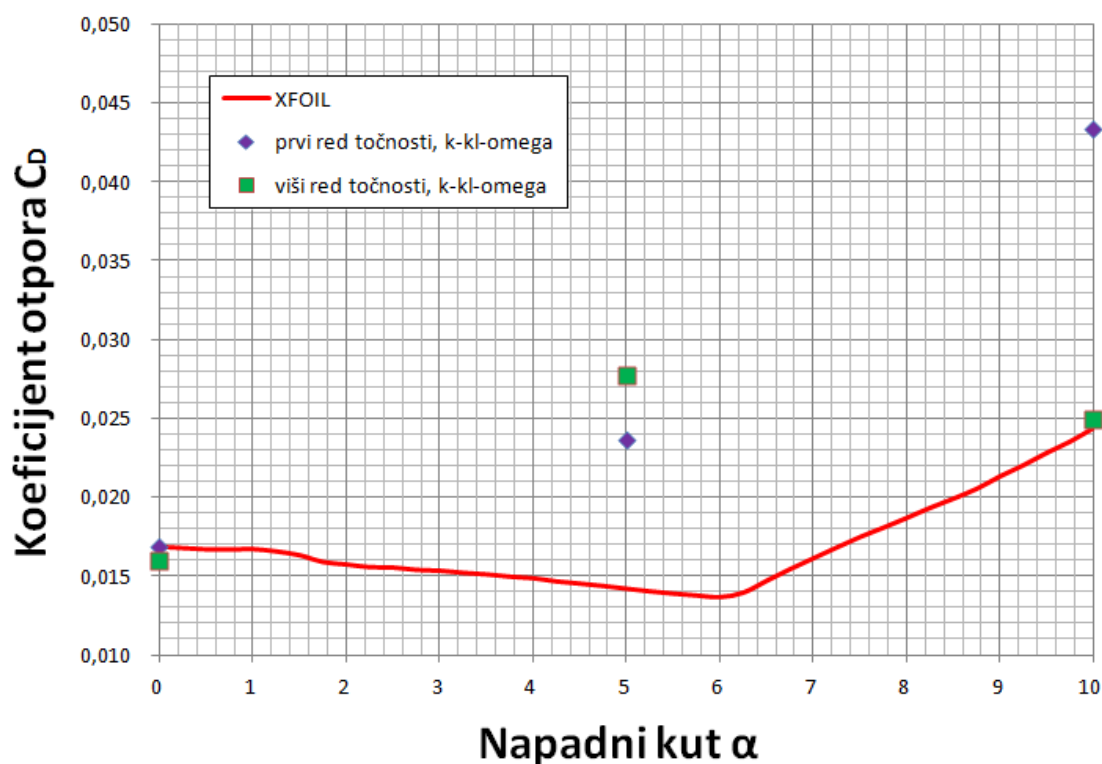
Slika 7.28 C_L pri $\alpha=10^\circ$ (viši red točnosti)

Da bi se koeficijenti uzgona i otpora mogli usporediti sa rezultatima dobivenim Drelinim XFOIL kodom [18][24], oni se moraju osrednjiti u vremenu. U *Tablici 7.6* su dane osrednjene vrijednosti koeficijenta otpora i koeficijenta uzgona prikazanih *Slikama 7.17 – 7.28*.

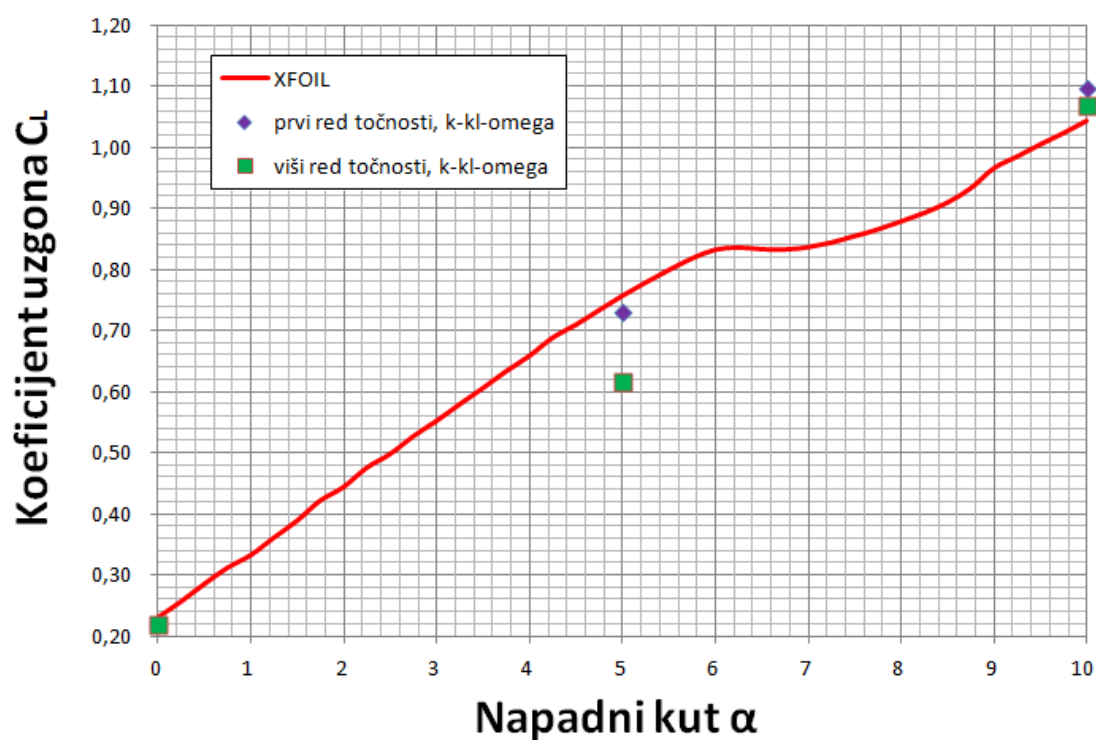
Tablica 7.6 Vremenski osrednjeni koeficijenti optora $\overline{C_D}$ i uzgona $\overline{C_L}$ s obzirom na napadni kut α i red točnosti

Napadni kut α (°)	Red točnosti shema konvekcije	Osrednjeni koeficijent otpora $\overline{C_D}$	Osrednjeni koeficijent uzgona $\overline{C_L}$
0	Prvi	0,016838	0,217118
0	Viši	0,015958	0,217864
5	Prvi	0,023642	0,731282
5	Viši	0,027719	0,614923
10	Prvi	0,043373	1,095879
10	Viši	0,024954	1,068715

U sljedećim dijagramima su prikazani rezultati iz *Tablice 7.6* i rezultati dobiveni XFOIL kodom.

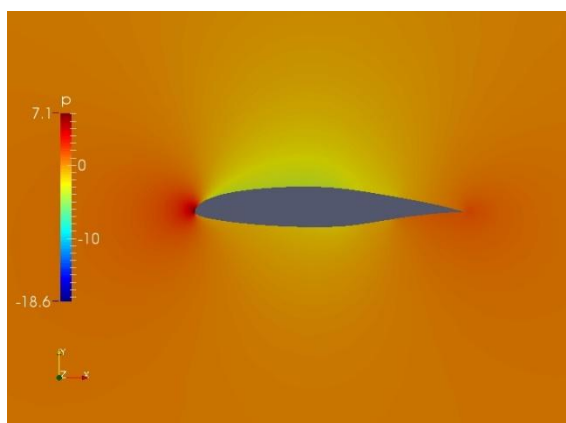


Slika 7.29 Koeficijent otpora C_D u ovisnosti od napadnog kuta α

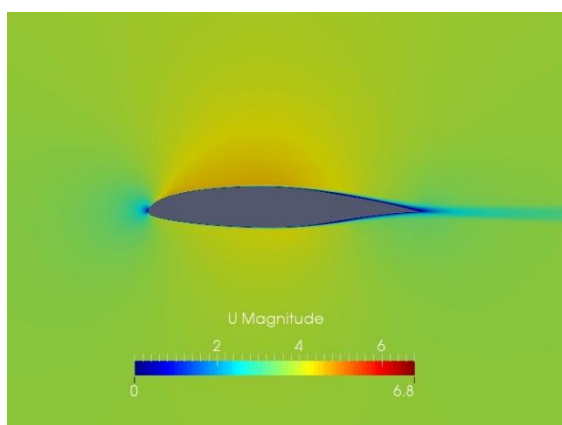


Slika 7.30 Koeficijent uzgona C_L u ovisnosti od napadnog kuta α

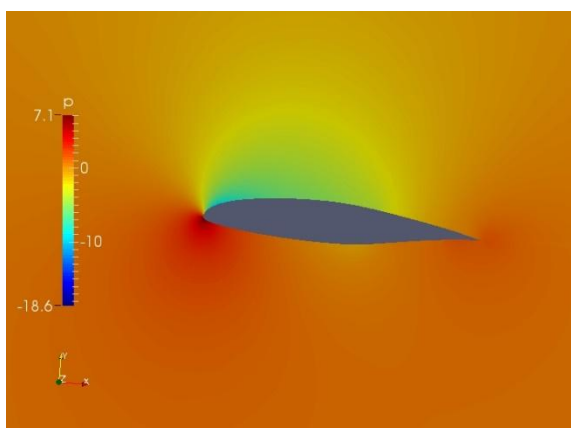
Na sljedećim slikama su prikazana polja tlaka i brzine za sve napadne kuteve te za prvi i viši red točnosti.



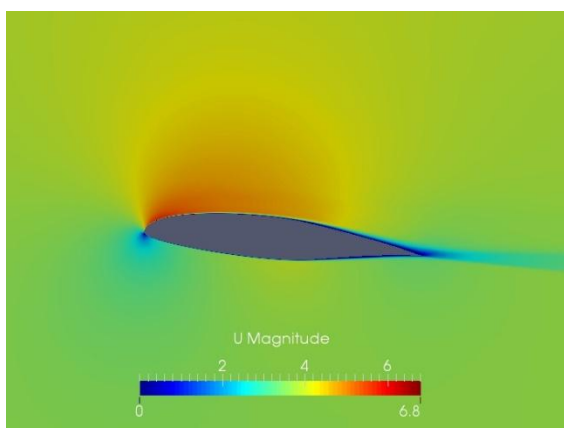
Slika 7.31 Polje tlaka pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



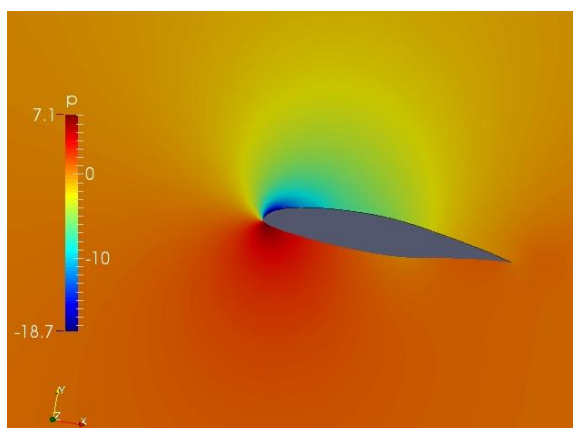
Slika 7.32 Polje brzine pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



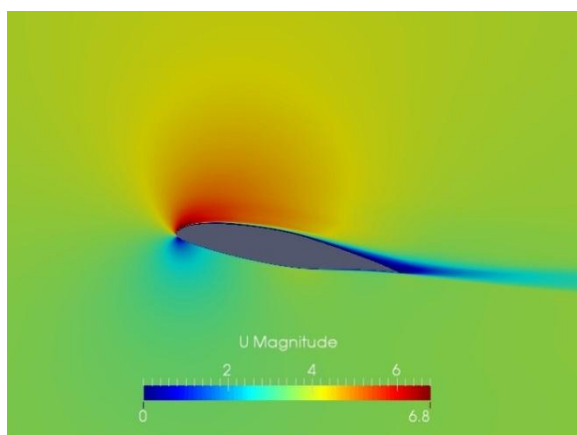
Slika 7.33 Polje tlaka pri $\alpha=5^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



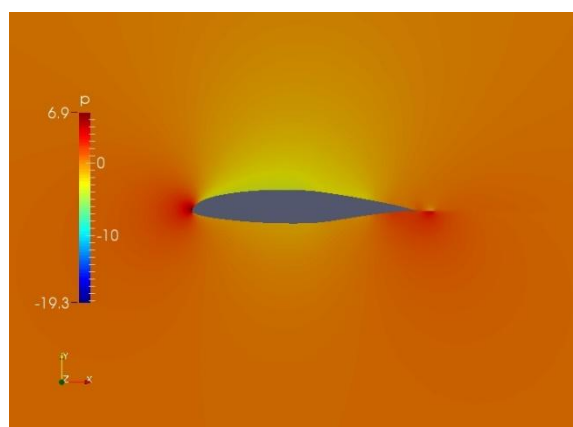
Slika 7.34 Polje brzine pri $\alpha=5^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



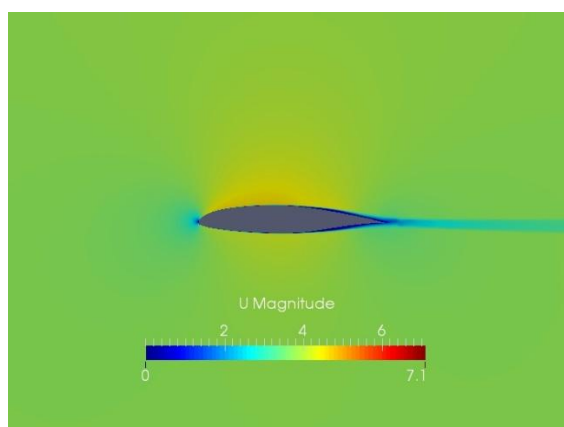
Slika 7.35 Polje tlaka pri $\alpha=10^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



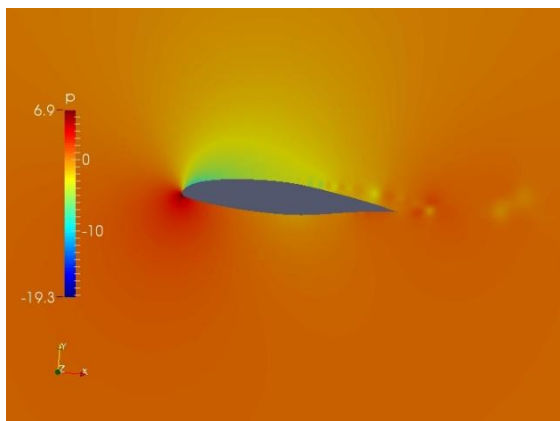
Slika 7.36 Polje brzine pri $\alpha=10^\circ$ ($t = 30$ s, prvi red točnosti)



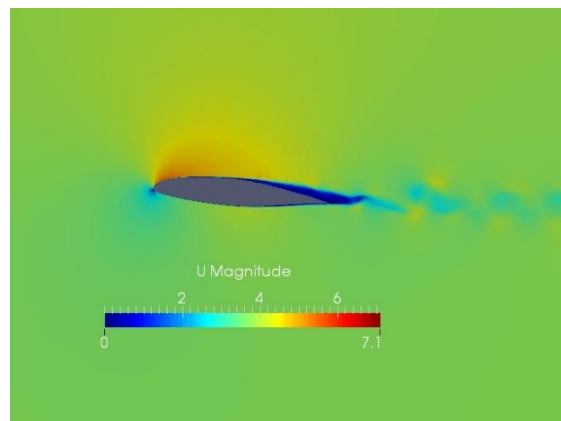
Slika 7.37 Polje tlaka pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 16$ s, drugi red točnosti)



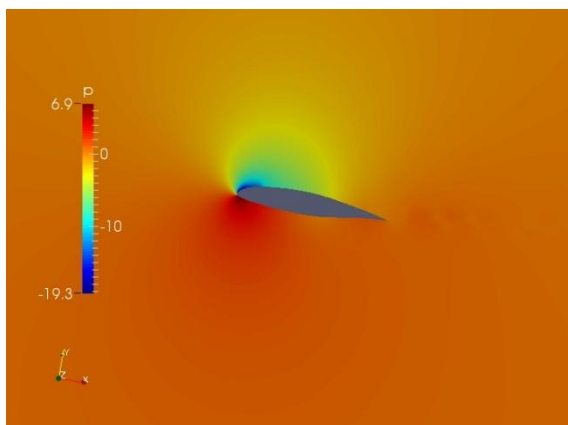
Slika 7.38 Polje brzine pri $\alpha=0^\circ$ ($t = 16$ s, drugi red točnosti)



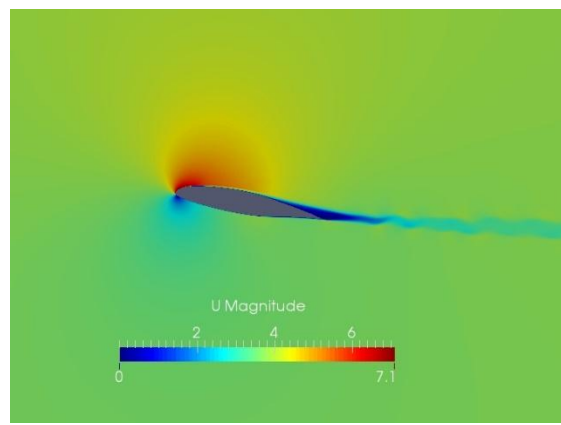
Slika 7.39 Polje tlaka pri $\alpha=5^\circ$ ($t = 11,5$ s, drugi red točnosti)



Slika 7.40 Polje brzine pri $\alpha=5^\circ$ ($t = 11,5$ s, drugi red točnosti)



Slika 7.41 Polje tlaka pri $\alpha=10^\circ$ ($t = 27$ s, drugi red točnosti)



Slika 7.42 Polje brzine pri $\alpha=10^\circ$ ($t = 27$ s, drugi red točnosti)

8. ZAKLJUČAK

Iz dijagrama na *Slikama 7.29 i 7.30* se vidi da se rezultati dobiveni (viši red točnosti, k - kl - ω) za napadne kuteve 0° i 10° dobro poklapaju sa onima dobivenim XFOIL kodom. Međutim, teško da se nešto može zaključiti iz toga jer rezultati XFOIL-a nisu eksperimentalna mjerenja.

Da bi rezultati numeričke simulacije strujanja oko NLF(1) – 0115 aeroprofila bili donekle pouzdani, ispitana je valjanost k - kl - ω modela turbulencije na strujanju oko cilindra pri $Re = 1 \cdot 10^5$. Strujanje je modelirano pri nižim Reynoldsovim brojevima jer će grančni sloj u velikom dijelu biti laminaran što se i želi. Tada će se moći pokazati prednost k - kl - ω modela turbulencije. Naime, izvršena je numerička simulacija strujanja oko cilindra pomoću k - kl - ω modela turbulencije. Koeficijent otpora dobiven iz numeričke simulacije je uspoređen sa koeficijentima otpora dobivenim eksperimentalnim mjerenjima i k - ω SST modelom turbulencije. Iz *Tablice 7.3* je jasno da k - kl - ω daje najbolje rezultate. Razlika osrednjenog koeficijenta otpora eksperimentalnih mjerenja i k - kl - ω modela je manja od 6%. K - ω SST model turbulencije daje osrednjeni koeficijent otpora koji se razlikuje od eksperimentalnog za čak 13%.

Model turbulencije (k - kl - ω) korišten u ovome završnom radu je noviji model turbulencije pa se o njegovim prednostima i nedostacima malo zna. Iako k - kl - ω izgleda obećavajuće, ono što se može zaključiti iz ovoga završnog rada je da se treba izvršiti što je više moguće numeričkih simulacija strujanja za koje postoji eksperimentalna mjerenja. Jedino se tako može doći do konkretnih zaključaka vezanih za kvalitetu k - kl - ω modela turbulencije.

LITERATURA

- [1] Ivo Džijan: "Računalna Dinamika Fluida". Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb 2010.
- [2] Versteeg and Malalasekera: "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: THE FINITE VOLUME METHOD". Pearson Education, 2007.
- [3] "Mehanike Fluida II – Što Valja Zapamtiti". Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb 2011.
- [4] Walters and Cokljat: "A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations of Transitional Flow". Journal of Fluids Engineering, December 2008.
- [5] Patankar, S. V.: "Numerical Heat Transfer And Fluid Flow". Hemisphere Publishing Corporation, USA 1980.
- [6] Ferziger and Peric: "Computational Methods for Fluid Dynamics". Springer-Verlag 2002.
- [7] Introduction to ANSYS FLUENT: "Turbulence Modeling". Lecture 6, ANSYS 2010.
http://imechanica.org/files/fluent_13.0_lecture06-turbulence.pdf
- [8] B. Aupoix, D. Arnal, H. Bézard, B. Chaouat, F. Chedevergne, S. Deck, V. Gleize, P. Grenard and E. Laroche: "Transition and Turbulence Modeling". Journal Aerospace Lab, Issue 2, March 2011. <http://www.aerospacelab-journal.org/sites/www.aerospacelab-journal.org/files/AL2-01.pdf>
- [9] R. Yin and W.K. Chow: "Comparison of Four Algorithms for solving Pressure-Velocity Linked Equations in Simulating Atrium Fire". International Journal on Architectural Science, Volume 4, Number 1 p. 24-35, 2003.
- [10] "Simulation of Turbulent Flows".
<http://web.stanford.edu/class/me469b/handouts/turbulence.pdf>
- [11] Johnson, M.W., 1993, "A bypass transition model for boundary layers", 93-GT-90, Presented at the international Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, Cincinnati, Ohio, May 24-27
- [12] "Bypass Transition". <http://www3.imperial.ac.uk/meflowscieng/projects/bypasstransition>
- [13] "Mehanika Fluida I – Što Valja Zapamtiti". Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb 2011.

- [14] Alex Mendonça Bimbato, Luiz Antonio Alcântara Pereira and Miguel Hiroo Hirata, "Simulation of viscous flow around a cylinder near a moving ground". Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Volume 31, number 3, Rio de Janeiro, July/Sept. 2009.
- [15] "Reynolds Number". http://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number
- [16] "OpenFOAM guide/The PIMPLE algorithm in OpenFOAMPIMPLE".
http://openfoamwiki.net/index.php/OpenFOAM_guide/The_PIMPLE_algorithm_in_OpenFOAM
- [17] "Compute Grid Spacing for a Given Y+". <http://www.pointwise.com/yplus/>
- [18] Drela: "XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils". MIT Dept. of Aeronautics and Astronautics, Cambridge, Massachusetts.
- [19] Selig and Maughmer: "Simplified Linear Stability Transition Prediction Method for Separated Boundary Layeres". AIAA JOURNAL, Volume 30, Number 8, August 1992.
- [20] Windte, Radesplel, Scholz and Elsfield: "RANS Simluation of Transitional Flow Around Airfoils at Low Reynolds Numbers for Steady and Unsteady Onset Conditions".
- [21] Selig, Maughmer and Somers: "Natural-Laminar-Flow Airfoil for General-Aviation Applications". Journal of Aircraft". Volume 32, Number 4, July – August 1995.
- [22] <http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/afplots/nlf0115.gif>
- [23] <http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord/nlf0115.dat>
- [24] <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=nlf0115-il>
- [25] William J. Devenport: "Experiment 3 - FLOW PAST A CIRCULAR CYLINDER". January 24, 2007.
- [26] Krpan I.: "Modeliranje aerodinamičkih profila". Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.
- [27] Paul Cantrell: "Airfoils". <http://www.copters.com/aero/airfoils.html>
- [28] "Airfoil". <http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>

PRILOZI

I. CD-R disc